古典型単純リー群

横田 一郎 著

現代数学社

古典型単純リー群

横　田　一　郎　著

現代数学社

ま え が き

S. Lie が Lie 群を創始したのが1880年代というから，Lie 群には丁度100年の歴史がある．Lie 群とは群の構造をもつ多様体のことである．群と多様体の両様の性質をもつことが Lie 群を調べやすくしており，多様な興味深い性質を内蔵している．そのため，常に数学の研究対象物とされ続けられており，E. Cartan, H. Weyl 等数多くの天才の手を経てすばらしい理論に構成されている．さて，Lie 群のなかに単純 Lie 群というものがある．それは Lie 群のなかの「分子」というべきもので，もはやこれ以上分解できないものである．単純とは，その文字が示す通り単純 (simple) なものであるので，一般の Lie 群はこれよりは複雑であるといえる．その単純な Lie 群について書くのであるが，さらに分かりやすい単純線型 Lie 群に限ってお話しして行こうと思う．話を易しくし，予備知識が無くても読めるようにと努めたため，記述に無理をした所があり，かえって読みづらくしたのではないかと心配している．しかし，話がすべて具体的であるため，気楽に読んで頂けるのではないかとも思っている．初心者のための書であるようにという出版社の要望にしたがい，定義はたとえ常識的なものであっても書くように努めた．また，話の筋道の見通しをよくするため，いくつかの定理は証明なしに認めることにし（＊印をつけておいた)，それらを用いて結果を導いた所がいくつかある．それらの定理は参考書をあげておいたので見ていただきたい．なお，単純 Lie 群には古典型と例外型とがある．ここでは古典型について書き，例外群については殆ど触れていない(最後の章に申し分け程度に書いておいた)．例外型についてはいつか続編として書きたいと思っている．

本書は雑誌 BASIC 数学1988年 2 月号～1989年 3 月号に連載されたものを一冊の書にまとめたものである．これらのことに関して現代数学社の皆様に大そうお世話になった．ここで厚く御礼申し上げる．また，この原稿をゼミしながら校正を手伝ってくれた浅利昌史，長田好晃，高橋清仁，高林邦之諸君に感謝し御礼申し上げる．

1989年11月

横　田　一　郎

目　次

1. 準　　備

1.1 体と多元環

以下，K で体を表わす．体といっても，実数体 $\boldsymbol{R}$，複素数体 $\boldsymbol{C}$ が主で，それに四元数体 $\boldsymbol{H}$ を用いるだけである．$\boldsymbol{H}$ は体というよりも $\boldsymbol{R}$-多元環とみる方が適当であるかもしれない．念のため，体 K, K-ベクトル空間 V, K-多元環 A の定義を与えておく．

定義　集合 M の任意の 2 つの元 a, b に対して，和とよばれる算法 $a+b\in M$ が定義されていて，次の 4 つの条件

(1)　$a+b=b+a$

(2)　$a+(b+c)=(a+b)+c$　　　$a, b, c\in M$

(3)　M に 0 で表わす特定の元が存在し，M の任意の元 a に対し $a+0=a$ がなりたつ

(4)　M の任意の元 a に対し $a+(-a)=0$ をみたす M の元 $-a$ が存在する

がなりたつとき，M は**加群**であるという．

定義　集合 R の任意の 2 つの元 a, b に対し，2 つの算法，和 $a+b\in R$ と積 $ab\in R$ が定義されていて，R は和 $a+b$ に関して加群であり，さらに次の 2 つの条件

(1)　$a(bc)=(ab)c$

(2)　$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$　　　$a, b, c\in R$

がなりたつとき，R は**環**であるという．環 R が，さらに次の条件

(3)　R に 1 で表わす特定の元(ただし $1\neq 0$)が存在し，R の任意の元 a に対し $a1=1a=a$ がなりたつ

をみたすとき，R は**単位元 1 をもつ環**であるという．また環が，条件

(4)　$ab=ba$　　　$a, b\in R$

をみたすとき，R は**可換環**であるという．

定義　単位元1をもつ環 K が，さらに次の条件

(1)　K の0と異なる任意の元 a に対して $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ をみたす K の元 a^{-1} が存在する

をみたすとき，K は**体**であるという．体 K が環として可換であるとき，K は**可換体**であるという．

例1.1　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は(通常の和と積に関して)可換体である．この体 $\boldsymbol{R}$ を**実数体**という．

例1.2　複素数全体の集合

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}=\{x+y\boldsymbol{i}\mid x,y\in\boldsymbol{R}\},\quad \boldsymbol{i}^2=-1$$

は（通常の和と積に関して）可換体である．この体 $\boldsymbol{C}$ を**複素数体**という．

例1.3　四元数全体の集合

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{j}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}$$
$$=\{x+y\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\mid x,y,s,t\in\boldsymbol{R}\}$$
$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1$$
$$\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}$$

は(通常の和と積に関して)体である．この体 $\boldsymbol{H}$ を**四元数体**という．$\boldsymbol{H}$ は可換体でない．四元数 α は

$$\alpha=x+y\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}=(x+y\boldsymbol{i})+(s+t\boldsymbol{i})\boldsymbol{j}\qquad x,y,s,t\in\boldsymbol{R}$$

と表わすことができるので，$\boldsymbol{H}$ を

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}\boldsymbol{j}=\{a+b\boldsymbol{j}\mid a,b\in\boldsymbol{C}\},\quad \boldsymbol{j}^2=-1$$

において，和と積を

$$(a+b\boldsymbol{j})+(c+d\boldsymbol{j})=(a+c)+(b+d)\boldsymbol{j},$$
$$(a+b\boldsymbol{j})(c+d\boldsymbol{j})=(ac-b\overline{d})+(b\overline{c}+ad)\boldsymbol{j}$$

で定義して得られる体であるとしてもよい．（$\overline{d}$, $\overline{c}$ は d,c の共役元を表わす（共役元については下記参照））．

実数体 $\boldsymbol{R}$, 複素数体 $\boldsymbol{C}$, 四元数体 $\boldsymbol{H}$ には，それらが共通にもつ性質がある．それは，体の各元に長さと共役元が定義されていることである．

実数 $x\in\boldsymbol{R}$ に対しては，絶対値（以後**長さ**という）$|x|$ が定義されて，$x,y\in\boldsymbol{R}$ に対し

$$|x+y|\leqq|x|+|y|,\quad |xy|=|x||y|$$

がなりたつことはよく知られている．なお，$x\in\boldsymbol{R}$ の共役元 $\overline{x}$ は自分自身である：$\overline{x}=x$. 複素数 $a=x+y\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{C}(x,y\in\boldsymbol{R})$ に対しては，a の**共役元** $\overline{a}$ と**長さ** $|a|$ を

$$\bar{a}=x-y\boldsymbol{i},\quad |a|=\sqrt{a\bar{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

で定義する．このとき $a, b\in \boldsymbol{C}$ に対し

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}\,\bar{b}$$

$$|a+b|\leqq|a|+|b|,\quad |ab|=|a||b|$$

がなりたつ．また，四元数 $\alpha=x+y\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}=a+b\boldsymbol{j}(x, y, s, t\in \boldsymbol{R},\ a, b\in \boldsymbol{C})$ に対し，α の**共役元** $\bar{\alpha}$ と**長さ** $|\alpha|$ を

$$\bar{\alpha}=x-y\boldsymbol{i}-s\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}=\bar{a}-b\boldsymbol{j}$$

$$|\alpha|=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}=\sqrt{x^2+y^2+s^2+t^2}=\sqrt{|a|^2+|b|^2}$$

で定義する．このとき，$\alpha, \beta\in \boldsymbol{H}$ に対し

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\,\bar{\alpha}$$

$$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|,\quad |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$$

がなりたつ．

これから，一般線型群 $GL(n, \boldsymbol{R}), GL(n, \boldsymbol{C}), GL(n, \boldsymbol{H})$ をはじめ，回転群 $SO(n)$，特殊 unitary 群 $SU(n)$，symplectic 群 $Sp(n)$ 等の群を定義して，その性質を調べようとするのであるが，そのためには体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ を知れば十分であるといえる．しかし，つぎに定義する split 複素数，split 四元数のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}'$ を知れば便利なことがある．以下でこれを説明しよう．

定義　K を可換体とする．集合 V の任意の 2 つの元 u, v に対して和 $u+v\in V$ が定義されていて，V はこの和に関して加群であり，さらに K の任意の元 λ と V の任意の元 u に対して $\lambda u\in V$ が一意に定まり，次の 4 つの条件

(1)　$\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$

(2)　$(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$　　$\lambda, \mu\in K$

(3)　$\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$　　$u, v\in V$

(4)　$1u=u$　　$1\in K$

がなりたつとき，V は**K-ベクトル空間**であるという．$K=\boldsymbol{R}$ のとき V を**実ベクトル空間**，$K=\boldsymbol{C}$ のとき V を**複素ベクトル空間**という．

定義　K を可換体とする．K-ベクトル空間 V の元 $u_1, \cdots, u_n$ が，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n\in K$ に対し

$$\lambda u_1+\cdots+\lambda_n u_n=0\quad ならば\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

がなりたつとき，$u_1, \cdots, u_n$ は **K-1 次独立**であるという．V に n 個の K-1 次独立な元 $u_1, \cdots, u_n$ が存在し，任意の $u\in V$ が

$$u=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n \qquad \lambda_i \in K$$

と表わされるとき，V は **n 次元**であるといい，

$$\dim V=n \qquad (詳しくは \dim_K V=n)$$

で表わす．（この n は $u_1, \cdots, u_n$ のとり方によらず，V に対して一意に定まる）．K-ベクトル空間 V が n 次元であるとき，n 個の K-1 次独立な V の元の集合 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の **K-基底**という．

定義　K を可換体とし，V を K-ベクトル空間とする．V の部分集合 W が，次の 2 つの条件

(1)　$w, w' \in W$　ならば　$w+w' \in W$

(2)　$\lambda \in K, w \in W$　ならば　$\lambda w \in W$

をみたすとき，W は V の **K-部分ベクトル空間**であるという．

定義　K を可換体とし，V_1, V_2 を K-ベクトル空間とする．V_1, V_2 の直積集合

$$V_1 \times V_2=\{(u_1, u_2) \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$$

において，和と λ 倍を

$$(u_1, u_2)+(v_1, v_2)=(u_1+v_1, u_2+v_2)$$
$$\lambda(u_1, u_2)=(\lambda u_1, \lambda u_2) \qquad \lambda \in K$$

で定義すると，$V_1 \times V_2$ は K-ベクトル空間になる．この K-ベクトル空間 $V_1 \times V_2$ を V_1, V_2 の**直和**といい，$V_1 \oplus V_2$ で表わす．

定義　K を可換体とする．集合 A の任意の 2 つの元 a, b に対して，和 $a+b \in A$ と積 $ab \in A$ および K の任意の元 $\lambda \in K$ と A の任意の元 a に対して $\lambda a \in A$ が定義されていて，A は算法 $a+b, ab$ に関して環であり，また A は算法 $a+b, \lambda a$ に関して K-ベクトル空間であり，さらに次の条件

(1)　$(\lambda a)b=\lambda(ab)=a(\lambda b)$　　$\lambda \in K$，$a, b \in A$

がなりたつとき，A は **K-多元環**であるという．K-多元環 A が環として単位元 1 をもつとき，A は**単位元 1 をもつ K-多元環**であるという．単位元 1 をもつ K-多元環 A では，$\lambda 1 (\lambda \in K)$ を単に λ と書くのが普通である．K-多元環 A が環として可換であるとき，A は**可換 K-多元環**であるという．また，K-多元環 A が K-ベクトル空間として n 次元であるとき，A は **n 次元 K-多元環**であるという．

定義　K を可換体とし，A を K-多元環とする．A の部分集合 B が A の K-部分ベクトル空間であり，さらに次の条件

(1)　$a, b \in B$　ならば　$ab \in B$

をみたすとき，B は A の **K-部分多元環**であるという．

定義　K を可換体とし，A_1, A_2 を K-多元環とする．A_1, A_2 の K-ベクトル空間としての直和 $A_1 \oplus A_2$ において，積を

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2)=(a_1b_1, a_2b_2)$$

で定義すると，$A_1 \oplus A_2$ は K-多元環になる．この K-多元環 $A_1 \oplus A_2$ を A_1, A_2 の**直和**という．

例1.4　複素数体 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}$ は複素数の和 $a+b$，積 ab に関して単位元 1 をもつ可換環であるが，複素数 a の実数倍 λa を考えることにより，$\boldsymbol{C}$ は単位元 1 をもつ可換な 2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．

例1.5　例1.4と同様に，四元数体 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{j}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}$ は単位元 1 をもつ（非可換な） 4 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．

例1.6　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とし，$M(n, K)$ で K の元を成分にもつ n 次の行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}\in K$$

全体を表わす．$M(n, K)$ は行列の和 $A+B$，積 AB：

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{ij}+b_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{pmatrix}$$

に関して環になる．さらに，$\lambda\in K$ と $A\in M(n, K)$ に対し $\lambda A\in M(n, K)$ を

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{ij} \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき，$M(n, \boldsymbol{R})$ は単位元 $E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ をもつ n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環であり，$M(n, \boldsymbol{C})$ は単位元 E_n をもつ n^2 次元 $\boldsymbol{C}$-多元環である．以後，E_n の n を省略して単に E と書くことにする．この行列環 $M(n, K)$ は非常に重要であるので，後で再び述べることになる．

さて，本節の目的である split 複素数，split 四元数について説明しよう．

定義　$$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}'=\{x+y\boldsymbol{i}' \mid x, y\in\boldsymbol{R}\}$$

において，和 $a+b$，実数倍 λa，積 ab を

$$(x+y\boldsymbol{i}')+(s+t\boldsymbol{i}')=(x+s)+(y+t)\boldsymbol{i}'$$

$$\lambda(x+y\boldsymbol{i}')=\lambda x+\lambda y\boldsymbol{i}' \qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

$$(x+y\boldsymbol{i}')(s+t\boldsymbol{i}')=(xs+yt)+(ys+xt)\boldsymbol{i}'$$

（特に $\boldsymbol{i}'^2=1$ である）で定義すると，$\boldsymbol{C}'$ は単位元 1 をもつ可換な 2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．$\boldsymbol{C}'$ の元を **split 複素数**という．$\boldsymbol{C}'$ の元 $a=x+y\boldsymbol{i}'(x, y\in\boldsymbol{R})$ に対して，a の**共役元** $\bar{a}$ と**長さ** $|a|$ を

$$\bar{a}=x-y\boldsymbol{i}',\quad |a|=\sqrt{x^2+y^2}$$

で定義する．このとき，$a, b\in\boldsymbol{C}'$ に対して

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}\,\bar{b},$$

$$|a+b|\leqq|a|+|b|,\quad |ab|\leqq\sqrt{2}|a||b|$$

がなりたつ．このように，$\boldsymbol{C}'$ は複素数 $\boldsymbol{C}$ とよく似た性質をもっているが，本質的に異なるのは

(1)　$a\neq 0, b\neq 0$ でも $ab\neq 0$ とはならない

(2)　$a\bar{a}\geqq 0$ とはならない

ことであろう．実際，$\boldsymbol{i}'+1\neq 0$, $\boldsymbol{i}'-1\neq 0$ であるのに $(\boldsymbol{i}'+1)(\boldsymbol{i}'-1)=0$ となり，$\boldsymbol{i}'\,\overline{\boldsymbol{i}}'=-1$ となっている．

定義

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}'&=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}'\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{j}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}'\\&=\{x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}'\,|\,x, y, s, t\in\boldsymbol{R}\}\\&=\boldsymbol{C}'\oplus\boldsymbol{C}'\boldsymbol{j}=\{a+b\boldsymbol{j}\,|\,a, b\in\boldsymbol{C}'\}\end{aligned}$$

において，和 $\alpha+\beta$，実数倍 $\lambda\alpha$，積 $\alpha\beta$ を

$$(a+b\boldsymbol{j})+(c+d\boldsymbol{j})=(a+c)+(b+d)\boldsymbol{j}$$

$$\lambda(a+b\boldsymbol{j})=\lambda a+\lambda b\boldsymbol{j}\qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

$$(a+b\boldsymbol{j})(c+d\boldsymbol{j})=(ac-b\bar{d})+(b\bar{c}+ad)\boldsymbol{j}$$

で定義すると，$\boldsymbol{H}'$ は単位元 1 をもつ（非可換な） 4 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．H' の元 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}'$ の間の積は

$$\boldsymbol{i}'^2=\boldsymbol{k}'^2=1,\quad \boldsymbol{j}^2=-1$$

$$\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{k}',\quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}'\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}',\quad \boldsymbol{k}'\boldsymbol{i}'=-\boldsymbol{i}'\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{j}$$

で与えられている．$\boldsymbol{H}'$ の元を **split 四元数**という．$\boldsymbol{H}'$ の元 $\alpha=x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}'=a+b\boldsymbol{j}$ に対し，α の**共役元** $\bar{\alpha}$ と**長さ** $|\alpha|$ を

$$\bar{\alpha}=x-y\boldsymbol{i}'-s\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}'=\bar{a}-b\boldsymbol{j},$$

$$|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2+s^2+t^2}=\sqrt{|a|^2+|b|^2}$$

で定義する．このとき，$\alpha, \beta\in\boldsymbol{H}'$ に対して

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\,\bar{\alpha},$$

$$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|,\quad |\alpha\beta|\leqq\sqrt{2}|\alpha||\beta|$$

がなりたつ．$\boldsymbol{C}'$ のときと同様に，$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ でも $\alpha\beta = 0$ となり得るし，$\alpha\overline{\alpha} \geqq 0$ となるとは限らない．

上記の $\boldsymbol{H}'$ と本質的に同じものであるが，もう 1 つの $\boldsymbol{R}$-多元環 $'\boldsymbol{H}$ を定義しておこう．

$$
\begin{aligned}
'\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{j}' \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{k}' \\
&= \{ x + y\boldsymbol{i} + s\boldsymbol{j}' + t\boldsymbol{k}' \mid x, y, s, t \in \boldsymbol{R} \} \\
&= \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{j}' = \{ a + b\boldsymbol{j}' \mid a, b \in \boldsymbol{C} \}
\end{aligned}
$$

において，和 $\alpha + \beta$，実数倍 $\lambda\alpha$ は $\boldsymbol{H}'$ のときと同様に定義し，積 $\alpha\beta$ を

$$(a + b\boldsymbol{j}')(c + d\boldsymbol{j}') = (ac + b\overline{d}) + (b\overline{c} + ad)\boldsymbol{j}'$$

で定義すると，$'\boldsymbol{H}$ は単位元 1 をもつ（非可換な）4 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．$'\boldsymbol{H}$ の元 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ の間の積は

$$\boldsymbol{i}^2 = -1, \quad \boldsymbol{j}'^2 = \boldsymbol{k}'^2 = 1$$

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{j}'\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}', \quad \boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}'\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}'\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{j}'$$

で与えられている．$'\boldsymbol{H}$ の元 $\alpha = a + b\boldsymbol{j}'$ の共役元と長さの定義は $\overline{\alpha} = \overline{a} - b\boldsymbol{j}'$, $|\alpha| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ である．

定義　K を可換体とし，V, V' を K-ベクトル空間とする．写像 $f: V \to V'$ が次の 2 つの条件

(1)　$f(u+v) = f(u) + f(v)$　　$u, v \in V$

(2)　$f(\lambda u) = \lambda f(u)$　　$\lambda \in K$

をみたすとき，f は **K-線型写像**であるという．さらに，f が全単射であるとき，f は **K-線型同型写像**であるという．V, V' の間に K-線型同型写像 $f: V \to V'$ が存在するとき，V, V' は **K-ベクトル空間として同型**であるといい，$V \simeq V'$ で表わす．

定義　K を可換体とし，A, A' を K-多元環とする．写像 $f: A \to A'$ が K-線型写像であり，さらに

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad a, b \in A$$

をみたすとき，f は **K-多元環準同型写像**であるという．ただし，A, A' が単位元 1 をもつときには $f(1) = 1$ を要求するものとする．さらに，f が全単射であるとき，f は **K-多元環同型写像**であるという．A, A' の間に K-多元環同型写像 $f: A \to A'$ が存在するとき，A, A' は **K-多元環として同型**であるといい，$A \simeq A'$ で表わす．

例1.7　$\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H}', '\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である：$\boldsymbol{H}' \simeq '\boldsymbol{H}$．実際，

写像 $f：\boldsymbol{H}'\to{}'\boldsymbol{H}$,

$$f(x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}')=x+s\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}'+t\boldsymbol{k}'$$

$(x, y, s, t\in\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている．

命題1.8　2つの実数体 $\boldsymbol{R}$（これを1次元 $\boldsymbol{R}$-多元環とみて）の直和 $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$ は単位元 $(1,1)$ をもつ $\boldsymbol{R}$-多元環である．さて，split 複素数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{C}'$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である：

$$\boldsymbol{C}'\simeq\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$$

証明　写像 $f：\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}'$,

$$f(x, y)=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)\boldsymbol{i}'$$

が $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている．これを示すには直接計算で示しても容易であるが，次のようにすると見やすいであろう．$\boldsymbol{C}'$ において，

$$\iota=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{i}'),\quad \overline{\iota}=\frac{1}{2}(1-\boldsymbol{i}')$$

とおくと

$$\iota^2=\iota,\quad \overline{\iota}^2=\overline{\iota},\quad \iota\overline{\iota}=\overline{\iota}\iota=0,\quad \iota+\overline{\iota}=1$$

をみたしている．そして，f は

$$f(x, y)=x\iota+y\overline{\iota}$$

と表わされる．$\boldsymbol{C}'$ における積は

$$(x\iota+y\overline{\iota})(x'\iota+y'\overline{\iota})=(xx')\iota+(yy')\overline{\iota}$$

となるので，f が積を保つことは明らかである．なお，f の逆写像 g：$\boldsymbol{C}'\to\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$ は

$$g(p+q\boldsymbol{i}')=(p+q, p-q)$$

$(p, q\in\boldsymbol{R})$ で与えられる．

命題1.9　$M(2, \boldsymbol{R})$ は行列の和 $A+B$，実数倍 λA，行列の積 AB に関して4次元 $\boldsymbol{R}$-多元環であった(例1.6)．さて，split 四元数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H}'$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2, \boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である：

$$\boldsymbol{H}'\simeq M(2, \boldsymbol{R})$$

証明　写像 $f：\boldsymbol{H}'\to M(2, \boldsymbol{R})$,

$$f(x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}')=\begin{pmatrix} x+y & s+t \\ -s+t & x-y \end{pmatrix}$$

が $\boldsymbol{R}$-多元環としての同型を与えている．実際，f によって

$$1\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{i}'\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{j}\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{k}'\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

のように対応し，これらが $\boldsymbol{H}'$, $M(2,\boldsymbol{R})$ の $\boldsymbol{R}$-基底の間の対応であり，かつ積を含めて対応しているからである．

1.2 実制限と複素化

実数体 $\boldsymbol{R}$ は複素数体 $\boldsymbol{C}$ に含まれている（すなわち $\lambda\in\boldsymbol{R}$ を $\lambda+0\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{C}$ と同一視して $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$ とみなす）ので，$\boldsymbol{C}$-ベクトル空間，$\boldsymbol{C}$-多元環はそれぞれ $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間，$\boldsymbol{R}$-多元環とみなすことができる．このことは既に例1.4でみたことであるが，ここで改めて説明しておく．

定義 V を $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間とする．V は和 $u+v$ に関して加群であるが，$\lambda\in\boldsymbol{R}$, $u\in V$ に対して $\lambda u\in V$ を

$$\lambda u=(\lambda+0\boldsymbol{i})u$$

で定義すると，V は $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間になる．この $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V を $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間 V の**実制限**といい，$V_{\boldsymbol{R}}$ で表わす．$V_{\boldsymbol{R}}$ を単に V と書くことが多い．

補題1.10 $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間 V が n 次元ならば，V の実制限 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $V_{\boldsymbol{R}}$ は $2n$ 次元である：

$$\dim_{\boldsymbol{R}} V=2\dim_{\boldsymbol{C}} V$$

証明 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ を V の $\boldsymbol{C}$-基底とすれば，$\{u_1,\boldsymbol{i}u_1,\cdots,u_n,\boldsymbol{i}u_n\}$ が V の $\boldsymbol{R}$-基底となるからである．

定義 A を $\boldsymbol{C}$-多元環とする．A を $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間とみての実制限 $A_{\boldsymbol{R}}$ は A の積に関して $\boldsymbol{R}$-多元環になる．この $\boldsymbol{R}$-多元環 $A_{\boldsymbol{R}}$ を $\boldsymbol{C}$-多元環 A の**実制限**という．$A_{\boldsymbol{R}}$ を単に A と書くことが多い．

例1.11 複素数体 $\boldsymbol{C}$ の実制限 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{R}}$ は 2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である(例1.4)．より一般に，例1.6の $\boldsymbol{C}$-多元環 $M(n,\boldsymbol{C})$ の実制限 $M(n,\boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ は $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である．($M(n,\boldsymbol{H})$ は普通の複素数倍 λA では $\boldsymbol{C}$-多元環にはならないので上述の実制限ではないかもしれないが，$M(n,\boldsymbol{H})$ は行列の和 $A+B$，実数倍 λA，行列の積 AB に関して $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である)．

つぎに，実数体 $\boldsymbol{R}$ を複素数体 $\boldsymbol{C}$ に拡大することについて述べよう．複素数

体 $\boldsymbol{C}=\{x+y\boldsymbol{i}\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}$, $\boldsymbol{i}^2=-1$ の他にもう 1 つの複素数体

$$C=\{x+iy|x,y\in\boldsymbol{R}\},\quad i^2=-1$$

($x+iy$ は $x+yi$ と書いてもよい)を考える．$\boldsymbol{C}$ と C は $\boldsymbol{i}$ と i が太字であるか並字であるかの相異だけであって同じものであるが，$\boldsymbol{C}$ と C が共存する時には異なったものと理解する．もちろん C でなりたつことは $\boldsymbol{C}$ に置き換えてもなりたっている．複素数体 $\boldsymbol{C}$ では $a=x+y\boldsymbol{i}$ の共役元 $x-y\boldsymbol{i}$ は $\bar{a}$ で表わしたが，複素数体 C では $a=x+iy$ の共役元 $x-iy$ を τa で表わすことにする．

定義　V を $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とする．$u,v\in V$ に対して形式和 $u+iv$ を考える．2 つの形式和 $u+iv, u'+iv'$ に対して

$$u+iv=u'+iv' \quad \rightleftarrows \quad u=u', v=v'$$

であると約束する．さて，形式和 $u+iv$ 全体の集合

$$V^C=\{u+iv\,|\,u,v\in V\}$$

において，和と複素数倍を

$$(u+iv)+(u'+iv')=(u+u')+i(v+v')$$
$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(yu+xv)$$

($x,y\in\boldsymbol{R}$) で定義すると，V^C は C-ベクトル空間になる．この C-ベクトル空間 V^C を $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V の**複素化**という．V^C の元 $u+iv$ に対して，$u-iv$ を $u+iv$ の**共役元**といい，$\tau(u+iv)$ で表わす：

$$\tau(u+iv)=u-iv$$

写像 $\tau: V^C\to V^C$, $\tau(u+iv)=u-iv$ は $\tau^2=1$ (1 は V^C の恒等写像) をみたす半 C-線型写像である．すなわち，τ は

$$\tau(w+w')=\tau w+\tau w' \qquad w,w'\in V^C$$
$$\tau(aw)=(\tau a)(\tau w) \qquad a\in C$$

をみたしている．なお，$u\in V$ を $u+i0\in V^C$ と同一視して $V\subset V^C$ と見なすことにする．

定義　V, V' を $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とし，$f: V\to V'$ を $\boldsymbol{R}$-線型写像とする．写像 $f^C: V^C\to V'^C$ を

$$f^C(u+iv)=f(u)+if(v) \qquad u,v\in V$$

で定義すると，f^C は C-線型写像になる．この C-線型写像 f^C を $\boldsymbol{R}$-線型写像 f の**複素化**という．f^C を単に f と書くことが多い．なお，$f: V\to V'$ が $\boldsymbol{R}$-線型同型写像ならば，その複素化 $f^C: V^C\to V'^C$ は C-線型同型写像である．

注意　テンソル積のことを知っているならば，$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V の複素

化 V^C は

$$V^C = \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} V$$

として定義すればよい．$\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} V$ の元は

$$1 \otimes u + \boldsymbol{i} \otimes v \qquad u, v \in V$$

と一意に表わすことができる．そして，テンソル積記号 $\otimes$ を省略して，これを $u + \boldsymbol{i}v$ と略記することも普通のことである．しかし，このような省略記号を用いるとき，複素数体 $\boldsymbol{C}$ や四元数体 $\boldsymbol{H}$ をそれぞれ 2 次元，4 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とみなして（すなわち実制限 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{R}}$ を考えて）その複素化 $\boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C$ を作るとき，$\boldsymbol{C}$ の中の $\boldsymbol{i}$ と新しく導入された $\boldsymbol{i}$ との区別がつかなくなってしまう．これでは困るので，ここでは複素化の i は太字でなく並字で書いて区別することにした．

補題1.12　$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V が n 次元ならば，V の複素化 C-ベクトル空間 V^C も n 次元である．

$$\dim_C V^C = \dim V$$

証明　$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の $\boldsymbol{R}$-基底とすれば，$\{u_1, \cdots, u_n\}$ が V^C の C-基底となるからである．

定義　A を $\boldsymbol{R}$-多元環とする．A を $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とみての複素化 A^C において，積を

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

$(a, b, c, d \in A)$ と定義すると，A^C は C-多元環になる．この C-多元環 A^C を $\boldsymbol{R}$-多元環 A の**複素化**という．

例1.13　実数体 $\boldsymbol{R}$ の複素化 $\boldsymbol{R}^C$ は複素数体 C に他ならない：$\boldsymbol{R}^C = C$．より一般に，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{R})$ の複素化は C-多元環 $M(n, C)$ である（正しくは C-多元環として同型であるというべきかもしれないが）：

$$M(n, \boldsymbol{R})^C = M(n, C)$$

命題1.14　複素体は $\boldsymbol{C}$（これを $\boldsymbol{R}$-多元環とみて（例1.4））の複素化 $\boldsymbol{C}^C$ は split 複素数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{C}'$ の複素化 $\boldsymbol{C}'^C$ に C-多元環として同型である．したがって，これらは直和 C-多元環 $C \oplus C$ に C-多元環として同型である：

$$\boldsymbol{C}^C \simeq \boldsymbol{C}'^C \simeq C \oplus C$$

証明　写像 $h : \boldsymbol{C}^C \to \boldsymbol{C}'^C$,

$$h((x+y\boldsymbol{i}) + i(s+t\boldsymbol{i})) = (x+t\boldsymbol{i}') + i(s-y\boldsymbol{i}')$$

$(x, y, s, t \in \boldsymbol{R})$ は C-多元環の同型を与えている．命題の後半は，命題1.8の

$\boldsymbol{C}' \simeq \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$ の結果である：

$$\boldsymbol{C}'^C \simeq (\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R})^c \simeq \boldsymbol{R}^c \oplus \boldsymbol{R}^c = C \oplus C$$

この同型を与える C-多元環同型写像 $f_1 = h^{-1} f^C : C \oplus C \to \boldsymbol{C}^C$ の具体的な形は

$$f_1(a, b) = a\iota + b\bar{\iota} \qquad \iota = \frac{1}{2}(1 + i\boldsymbol{i})$$

である．$\boldsymbol{C}^C$ の元は

$$p + i\boldsymbol{i}q \qquad p, q \in C$$

と一意に表されることに注意すれば，f_1 の逆写像 $g_1 = g^C h : \boldsymbol{C}^C \to C \oplus C$ は(g は命題1.8の写像)

$$g_1(p + i\boldsymbol{i}q) = (p + q, p - q)$$

で与えられる．

これは次の命題のように拡張される．

命題1.15　C-多元環 $M(n, \boldsymbol{C})$ (これを $\boldsymbol{R}$-多元環とみて (例1.11)) の複素化 $M(n, \boldsymbol{C})^c$ は $M(n, C)$ の直和 C-多元環 $M(n, C) \oplus M(n, C)$ に C-多元環として同型である：

$$M(n, \boldsymbol{C})^c \simeq M(n, C) \oplus M(n, C)$$

証明　写像 $f : M(n, C) \oplus M(n, C) \to M(n, \boldsymbol{C})^c$,

$$f(A, B) = \iota A + \bar{\iota} B \qquad \iota = \frac{1}{2}(1 + i\boldsymbol{i})$$

が C-多元環の同型を与えている．$M(n, \boldsymbol{C})^c$ の行列は

$$P + i\boldsymbol{i}Q \qquad P, Q \in M(n, C)$$

と一意に表わされることに注意すれば，f の逆写像 $g : M(n, \boldsymbol{C})^c \to M(n, C) \oplus M(n, C)$ は

$$g(P + i\boldsymbol{i}Q) = (P + Q, P - Q)$$

で与えられる．

命題1.16　四元数体 $\boldsymbol{H}$ (これを $\boldsymbol{R}$-多元環とみて (例1.5)) の複素化 $\boldsymbol{H}^c$ は split 四元数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H}'$ の複素化 $\boldsymbol{H}'^C$ に C-多元環として同型である．したがって，これらは C-多元環 $M(2, C)$ (例1.6) に C-多元環として同型である：

$$\boldsymbol{H}^c \simeq \boldsymbol{H}'^C \simeq M(2, C)$$

証明　$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{C}' \oplus \boldsymbol{C}'\boldsymbol{j}$ であるから，$\boldsymbol{H}^c = \boldsymbol{C}^c \oplus \boldsymbol{C}^c\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}'^C = \boldsymbol{C}'^C \oplus \boldsymbol{C}'^C\boldsymbol{j}$ である．しかるに，C-多元環同型 $\boldsymbol{C}^c \simeq \boldsymbol{C}'^C$ (命題1.14) であるか

ら，C-多元環同型 $\boldsymbol{H}^C \simeq \boldsymbol{H}'^C$ を得る．命題1.9より，$\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H}' \simeq M(2, \boldsymbol{R})$ であったから，その複素化を考えると，C-多元環同型 $\boldsymbol{H}'^C \simeq M(2, C)$ を得る．

元 $a = x + iy \in \boldsymbol{C}^C (x, y \in \boldsymbol{C})$ に対し，**長さ** $|a|$ を

$$|a| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

で定義すると，$a, b \in \boldsymbol{C}^C$ に対し，

$$|a+b| \leqq |a| + |b|, \quad |ab| \leqq \sqrt{2}|a||b|$$

がなりたつ．また $\alpha = x + iy \in \boldsymbol{H}^C (x, y \in \boldsymbol{H})$ に対し，**長さ** $|\alpha|$ を

$$|\alpha| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

で定義すると，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{H}^C$ に対し，

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha\beta| \leqq 2|\alpha||\beta|$$

がなりたつ．($|ab| \leqq \sqrt{2}|a||b|$, $|\alpha\beta| \leqq 2|\alpha||\beta|$ は計算を要するかもしれないので，後(2章)で証明を与えるだろう)．

1.3　複素数と四元数の行列表示

実制限や複素化の操作は，体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ の或る意味での関係を示しているが，次の考察も体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ 間の関係を示していて，後でしばしば用いられる．

$$MJ(2, \boldsymbol{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \boldsymbol{R} \right\}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2, \boldsymbol{R})$ の 2 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，かつ，体にもなっていて，$x + y\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{C}$ と $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in MJ(2, \boldsymbol{R})$ を同一視することにより，複素数体 $\boldsymbol{C}$ とみなすことができるものである．同様なことは四元数体 $\boldsymbol{H}$ についてもいえる．

$$MJ(2, \boldsymbol{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \boldsymbol{C} \right\}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2, C)$ の 4 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，かつ，体にもなっていて，$a + b\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{H}$ と $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in MJ(2, \boldsymbol{C})$ と同一視することにより四元数体 $\boldsymbol{H}$ とみなすことができるものである．

以上のことは，次のように行列の多元環 $M(n, K)$ に拡張される．これを説明するために，行列の記号の約束から始める．

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\in M(n, K)$ に対し，${}^tA, \overline{A}, A^*\in M(n, K)$ をそれぞれ

$$ {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} \overline{a}_{11}\cdots \overline{a}_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \overline{a}_{n1}\cdots \overline{a}_{nn}\end{pmatrix}, $$

$$ A^*={}^t\overline{A}=\begin{pmatrix} \overline{a}_{11}\cdots \overline{a}_{n1} \\ \cdots\cdots \\ \overline{a}_{1n}\cdots \overline{a}_{nn}\end{pmatrix} $$

で定義し，順に A の**転置行列，共役行列，共役転置行列**という．また，行列 $J_n\in M(2n, K)$ を

$$ J_n=\begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J\end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} $$

で定義する．(行列の空白の所は 0 を省略したものとする)．以後，J_n の n を省略して単に J と書くことにする．そして

$$ MJ(2n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{R})\,|\,JA=AJ\} $$
$$ MJ(2n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C})\,|\,JA=\overline{A}J\} $$
$$ MJ(2n, \boldsymbol{C}')=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C}')\,|\,JA=\overline{A}J\} $$

とおく．

命題1.17　(1)　$MJ(2n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2n, \boldsymbol{R})$ の $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，写像 $k: M(n, \boldsymbol{C})\to MJ(2n, \boldsymbol{R})$,

$$ k((x+y\boldsymbol{i}))=\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x\end{pmatrix}\right) \qquad x, y\in\boldsymbol{R} $$

により，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{C})$ は $MJ(2n, \boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：

$$ M(n, \boldsymbol{C})\simeq MJ(2n, \boldsymbol{R}) $$

写像 k は

$$ k(A^*)={}^tk(A) \qquad A\in M(n, \boldsymbol{C}) $$

をみたしている．

(2)　$MJ(2n, \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2n, \boldsymbol{C})$ の $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，写像 $k: M(n, \boldsymbol{H})\to MJ(2n, \boldsymbol{C})$,

$$ k((a+b\boldsymbol{j}))=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\right) \qquad a, b\in\boldsymbol{C} $$

により，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{H})$ は $MJ(2n, \boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：

$$ M(n, \boldsymbol{H})\simeq MJ(2n, \boldsymbol{C}) $$

写像 k は

$$k(A^*)=k(\mathrm{A})^* \qquad A\in M(n,\boldsymbol{H})$$

をみたしている.

(3) $MJ(2n,\boldsymbol{C}')$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2n,\boldsymbol{C}')$ の $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，写像 $k: M(n,\boldsymbol{H}')\to MJ(2n,\boldsymbol{C}')$,

$$k((a+b\boldsymbol{j}))=\left(\left(\begin{matrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{matrix}\right)\right) \qquad a,b\in\boldsymbol{C}'$$

により，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n,\boldsymbol{H}')$ は $MJ(2n,\boldsymbol{C}')$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：

$$M(n,\boldsymbol{H}')\simeq MJ(2n,\boldsymbol{C}')$$

写像 k は

$$k(A^*)=k(A)^* \qquad A\in M(n,\boldsymbol{H}')$$

をみたしている.

証明 (1), (2), (3)の証明は同じであるから，(2)を示そう．まず，$A,B\in M(n,\boldsymbol{H})$ に対して $k(A+B)=k(A)+k(B)$, $k(\lambda A)=\lambda k(A)$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ は自明であるが，$k(AB)=k(A)k(B)$ を示さなければならない．しかし，これも実際に計算することにより確かめられる．k が単射であることは明らかであり，k が全射であることも，$A\in M(2n,\boldsymbol{C})$ が $JA=\bar{A}J$ をみたすならば，$A=\left(\left(\begin{matrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{matrix}\right)\right)$, $a,b\in\boldsymbol{C}$ の形をしていることが導けるので分かる．以上で，写像 k により，$M(n,\boldsymbol{H})\simeq MJ(2n,\boldsymbol{C})$ が示された．最後に，$k(A^*)=k(A)^*$, $A\in M(n,\boldsymbol{H})$ も容易に確かめられることである.

命題1.17を複素化することにより，直ちに次の命題を得る.

命題1.18 (1) $MJ(2n,C)=\{A\in M(2n,C)\mid JA=AJ\}$ は C-多元環 $M(2n,C)$ の $2n^2$ 次元 C-部分多元環であり，写像 $k: M(n,\boldsymbol{C}^C)\to MJ(2n,C)$,

$$k((x+y\boldsymbol{i}))=\left(\left(\begin{matrix} x & y \\ -y & x\end{matrix}\right)\right) \qquad x,y\in C$$

により，C-多元環 $M(n,\boldsymbol{C}^C)$ は $MJ(2n,C)$ に C-多元環同型である：

$$M(n,\boldsymbol{C}^C)\simeq MJ(2n,C)$$

写像 k は，$k(A^*)={}^tk(A)$, $A\in M(n,\boldsymbol{C}^C)$ をみたしている.

(2) $MJ(2n,\boldsymbol{C}^C)=\{A\in M(2n,\boldsymbol{C}^C)\mid JA=\bar{A}J\}$ は C-多元環 $M(2n,\boldsymbol{C}^C)$ の $4n^2$ 次元 C-部分多元環であり，写像 $k: M(n,\boldsymbol{H}^C)\to MJ(2n,\boldsymbol{C}^C)$,

$$k((a+b\boldsymbol{j}))=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) \qquad a, b\in \boldsymbol{C}^C$$

により，C-多元環 $M(n, \boldsymbol{H}^C)$ は $MJ(2n, \boldsymbol{C}^C)$ に C-多元環同型である：

$$M(n, \boldsymbol{H}^C)\simeq MJ(2n, \boldsymbol{C}^C)$$

写像 k は，$k(A^*)=k(A)^*, A\in M(n, \boldsymbol{H}^C)$ をみたしている．

以上のことは $\boldsymbol{C}', '\boldsymbol{H}$ を成分にもつ行列 $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{C}'), M(n, '\boldsymbol{H})$ についてもなりたつ．$J'=J'_n\in M(2n, K)$ を

$$J'_n=\begin{pmatrix} J' & & \\ & \ddots & \\ & & J' \end{pmatrix}, \quad J'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義し，

$$MJ'(2n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{R}) | J'A=AJ'\}$$
$$MJ'(2n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C}) | J'A=\bar{A}J'\}$$

とおく．

命題1.19　(1)　$MJ'(2n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2n, \boldsymbol{R})$ の $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，写像 k'：$M(n, \boldsymbol{C}')\to MJ'(2n, \boldsymbol{R})$,

$$k'((x+y\boldsymbol{i}'))=\left(\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\right) \qquad x, y\in \boldsymbol{R}$$

により，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{C}')$ は $MJ'(2n, \boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：

$$M(n, \boldsymbol{C}')\simeq MJ'(2n, \boldsymbol{R})$$

写像 k' は，$k'(A^*)={}^tk'(A), A\in M(n, \boldsymbol{C}')$ をみたしている．

(2)　$MJ'(2n, \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(2n, \boldsymbol{C})$ の $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-部分多元環であり，写像 k'：$M(n, '\boldsymbol{H})\to MJ'(2n, \boldsymbol{C})$,

$$k'((a+b\boldsymbol{j}'))=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) \qquad a, b\in \boldsymbol{C}$$

により，$\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, '\boldsymbol{H})$ は $MJ'(2n, \boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：

$$M(n, '\boldsymbol{H})\simeq MJ'(2n, \boldsymbol{C})$$

写像 k' は，$k'(A^*)=k'(A)^*, A\in M(n, '\boldsymbol{H})$ をみたしている．

2. 線型 Lie 群

古典型単純線型 Lie 群を定義し，これらの群の性質を調べるのが目的であるが，その前に，一般線型 Lie 群とよばれる群

$$GL(n, \boldsymbol{R}), \quad GL(n, \boldsymbol{C}), \quad GL(n, \boldsymbol{H})$$

を定義することから始めよう．これらは単に群であるだけでなく，位相群であり，さらに Lie 群の構造をもっている．まず，群の定義から始めよう．

定義　集合 G の任意の 2 つ元 a, b に対して，積とよばれる算法 $ab \in G$ が定義されていて，次の 3 つの条件

(1)　$a(bc)=(ab)c \qquad a, b, c \in G$

(2)　G に 1 で表わす特定の元が存在し，G の任意の元 a に対し $a1=1a=a$ がなりたつ

(3)　G の任意の元 a に対し $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ をみたす G の元 a^{-1} が存在する

がなりたつとき，G は**群**であるという．1 を群 G の**単位元**，a^{-1} を a の**逆元**という．

定義　群 G の部分集合 H が，次の 2 つの条件

(1)　$a, b \in H$　ならば　$ab \in H$

(2)　$a \in H$　ならば　$a^{-1} \in H$

をみたすとき，H は G の**部分群**であるという．これは，H が群 G の積算法により H が群になるということに他ならない．群 G の部分群 N が，さらに条件

(3)　$g \in G, n \in N$　ならば　$gng^{-1} \in N$

をみたすとき，N は G の**正規部分群**であるという．

定義 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c)$ とする．行列 $A \in M(n, K)$ に対し

$$AB=BA=E$$

をみたす行列 $B \in M(n, K)$ が存在するとき，A は**正則**であるという．この B は A に対して一意に定まるので，A^{-1} で表わし，A の**逆行列**という．

定義
$$GL(n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(n, \boldsymbol{R}) | A \text{ は正則}\}$$
$$GL(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C}) | A \text{ は正則}\}$$
$$GL(n, \boldsymbol{H})=\{A\in M(n, \boldsymbol{H}) | A \text{ は正則}\}$$
とおく．（同様に $GL(n, \boldsymbol{C}')$, $GL(n, \boldsymbol{H}')$, $GL(n, \boldsymbol{C}^c)$, $GL(n, \boldsymbol{H}^c)$ が定義できる）．これらが，行列の積に関して群になることは明らかであろう．群の単位元は単位行列 E である．$GL(n, \boldsymbol{R})$ を**実一般線型群**, $GL(n, \boldsymbol{C})$ を**複素一般線型群**, $GL(n, \boldsymbol{H})$ を**四元数一般線型群**という．

行列の正則性について，次の補題がなりたつ．

補題2.1　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c)$ とする．$A, B\in M(n, K)$ に対し
$$AB=E \quad \text{ならば} \quad BA=E$$
がなりたつ．

証明　（$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のときには，これらが体であることに注意して，$A\in M(n, K)$ を K-線型写像 $A: K^n\to K^n$, $\boldsymbol{a}\to A\boldsymbol{a}$ とみるとき
$$A \text{ が全射} \quad \text{ならば} \quad A \text{ は単射になる}$$
（逆も正しい）という線型代数学でよく知られた定理（[9] 補題12）に他ならない．（体 K の可換性は必要としない．しかし，体 K が非可換であるときには，K^n を右 K-ベクトル空間とみなすことが必要であるが）．$\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c$, $\boldsymbol{H}^c$ は体ではないので，この証明は通用しない）．

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．（このとき K は体であるので上記のようにして証明ずみであるともいえるが，ここでは行列式を用いて証明することにしよう）．K は可換体であるので，行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\in M(n, K)$ に対して行列式 $\det A\in K$ が定義される：
$$\det A=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}\,\sigma\, a_{1i_1}\cdots a_{ni_n} \qquad \sigma=\begin{pmatrix} 1\cdots n \\ i_1\cdots i_n\end{pmatrix}$$
行列式は次の性質をもっている．
$$\det(AB)=\det A \det B \qquad A, B\in M(n, K) \tag{i}$$
$$\det E=1 \tag{ii}$$
行列 $A\in M(n, K)$ に対して，行列 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11}\cdots A_{n1} \\ \cdots \\ A_{1n}\cdots A_{nn}\end{pmatrix}\in M(n, K)$ をつくる．ここに，A_{ij} は行列 A から i 行，j 列を除いた $n-1$ 次の行列の行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものである．このとき

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=(\det A)E \qquad \text{(iii)}$$

がなりたつ．(以上既知とする)．

さて，$AB=E$ とすると，(i),(ii)より，$\det A \det B=\det(AB)=\det E=1$ となるので $\det A \neq 0$ となる．そこで，$B'=\dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ とおくと，(iii)より

$$AB'=B'A=E$$

となり，A は正則である．このとき $B'=B'E=B'AB=EB=B$ となり，特に，$BA=E$ を得る．

$K=\boldsymbol{H}, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c$ とする．($K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$ は可換環であるから，行列 $A\in M(n, K)$ の行列式 $\det A$ が定義できて，(i),(ii),(iii) がなりたつ．しかし，$\det A\neq 0$ でも $\dfrac{1}{\det A}$ が意味がないことがあるので，上記のようにはならない．($\det A=1$ のときには A は正則であるといえるが))．$K=\boldsymbol{H}$ のときには，命題1.17(2)の $\boldsymbol{R}$-多元環同型写像 $k: M(n, \boldsymbol{H})\to MJ(2n, \boldsymbol{C})\subset M(2n, \boldsymbol{C})$ を用いる．さて，$A, B\in M(n, \boldsymbol{H})$ が $AB=E$ であるとする．k を施すと，$k(A)k(B)=k(E)=E$ となる．$M(2n, \boldsymbol{C})$ では既に示したように，$k(B)k(A)=E$ となる．よって，$k(BA)=E$ となるが，k の単射より，$BA=E$ を得る．$K=\boldsymbol{C}'$ のときには命題1.19の $\boldsymbol{R}$-多元環同型写像 $k': M(n, \boldsymbol{C}')\to MJ'(2n, \boldsymbol{R})\subset M(2n, \boldsymbol{R})$ を用いればよく，$K=\boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c$ のときも命題1.17，命題1.18の写像 k を用いれば，既知の所に帰着され，同様に証明することができる．

補題2.1で示したように，$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ ならば $A\in M(n, K)$ に対して

$$A \text{ が正則} \quad \rightleftarrows \quad \det A\neq 0$$

がなりたつ．したがって，実，複素一般線型群を

$$GL(n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(n, \boldsymbol{R}) \mid \det A\neq 0\}$$
$$GL(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C}) \mid \det A\neq 0\}$$

で定義してもよい．

ここで位相空間の知識を少し仮定して（後で定義を補って行く）位相群と Lie 群の定義を与えよう．

定義　群 G が次の 2 つの条件

(1)　位相空間である

(2)　写像 $\mu: G\times G\to G$，$\mu(a, b)=ab$ および写像 $\nu: G\to G$，$\nu(a)=a^{-1}$ は共に連続である

をみたすとき，G は**位相群**であるという．

定義　群 G が次の 2 つの条件

(1)　G は C^∞-可微分多様体である（Hausdorff 性と第 2 可算公理を仮定しておく）

(2)　写像 $\mu: G\times G\to G$，$\mu(a,b)=ab$ および写像 $\nu: G\to G, \nu(a)=a^{-1}$ は共に C^∞-可微分写像である

をみたすとき，G は **Lie 群**であるという．

ここで，位相群の定義に現われた位相空間と写像の連続の定義を与えておこう．

定義

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in\boldsymbol{R}\}$$

において，和 $x+y$，実数倍 λx を

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)\qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

で定義すると，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間になる．$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ の**長さ** $|x|$ を

$$|x|=\sqrt{x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

で定義する．このとき，$x,y\in\boldsymbol{R}^n$ に対し

(1)　$|x|\geqq 0$

(2)　$|x|=0 \quad \rightleftarrows \quad x=0$

(3)　$|\lambda x|=|\lambda||x| \qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$

(4)　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

がなりたつ．この長さ $|x|$ が定義された $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を **n 次元 Euclid 空間**という．

以上を準備すると，$\boldsymbol{R}^n$ に位相を導入することができる．これを説明しよう．

定義　M を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする：$M\subset\boldsymbol{R}^n$．

(1)　M の点列 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ が点 $x\in M$ に対し

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0$$

となるとき，点列 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ は点 x に**収束する**といい，

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x$$

で表わす．

(2)　M の部分集合 F が M の**閉集合**であるとは，F の点列 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ が点 $x\in M$ に収束するならば $x\in F$ となることで定義する．

(3)　M の部分集合 O が M の**開集合**であるとは，補集合 $M-O$ が M の閉集合であることと定義する．

定義　$M\subset \boldsymbol{R}^n, N\subset \boldsymbol{R}^{n'}$ とする．写像 $f: M\to N$ が次の条件

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad ならば \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(x)$$

をみたすとき，f は**連続**であるという．

補題2.2　$M\subset \boldsymbol{R}^n, N\subset \boldsymbol{R}^{n'}$ とする．写像 $f: M\to N$ に対して，次の 3 つの条件は同値である．

(1)　f は連続である

(2)　N の任意の開集合 O に対して，$f^{-1}(O)=\{x\in M \mid f(x)\in O\}$ は M の開集合である

(3)　N の任意の閉集合 F に対して，$f^{-1}(F)=\{x\in M \mid f(x)\in F\}$ は M の閉集合である

定義　$M\subset \boldsymbol{R}^n, N\subset \boldsymbol{R}^{n'}$ とする．写像 $f: M\to N$ が全単射であり，かつ，f および f の逆写像 $g: N\to M$ が連続であるとき，f は**同相写像**であるという．M と N の間に同相写像 $f: M\to N$ が存在するとき，M と N は**同相**であるといい，$M\simeq N$ で表わす．

定義　$\boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^{n'}$ の点 $((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_{n'}))$ を $\boldsymbol{R}^{n+n'}$ の点 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_{n'})$ と同一視することにより，$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n'}=\boldsymbol{R}^{n+n'}$ とみなす．さて，$M\subset\boldsymbol{R}^n$, $N\subset\boldsymbol{R}^{n'}$ とする．このとき $M\times N\subset \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n'}=\boldsymbol{R}^{n+n'}$ となるので，$M\times N$ に位相を導入することができる．この $M\times N$ を M, N の**直積空間**という．

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とし，$M(n,K)$ の各元 X に長さ $|X|$ を定義し，$M(n,K)$ に位相を導入しよう．さて，$x\in K$ に対して長さ $|x|\in\boldsymbol{R}$ が定義されていることを用いて，$X=\left(x_{ij}\right)\in M(n,K)$ の**長さ** $|X|$ を

$$|X|=\sqrt{\sum_{i,j}|x_{ij}|^2}$$

で定義する．これは，$M(n,K)$ をある Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^m$ と同一視して，その長さを $M(n,K)$ に導入したものである．例えば，$K=\boldsymbol{C}$ のとき

$X=\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11}\boldsymbol{i} & \cdots & x_{1n}+y_{1n}\boldsymbol{i} \\ & \cdots & \\ x_{n1}+y_{n1}\boldsymbol{i} & \cdots & x_{nn}+y_{nn}\boldsymbol{i}\end{pmatrix}\in M(n,\boldsymbol{C})$ と $x=(x_{11},y_{11},\cdots,x_{1n},y_{1n},\cdots,x_{n1},$ $y_{n1},\cdots,x_{nn},y_{nn})\in\boldsymbol{R}^{2n^2}$ を同一視して，$|X|=|x|$ として定義しているわけである．他も同様であって，同一視で

$$M(n,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{n^2},\quad M(n,\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}^{2n^2},\quad M(n,\boldsymbol{H})=\boldsymbol{R}^{4n^2},$$

$$M(n, \boldsymbol{C}')=\boldsymbol{R}^{2n^2}, \quad M(n, \boldsymbol{H}')=\boldsymbol{R}^{4n^2},$$
$$M(n, \boldsymbol{C}^C)=\boldsymbol{R}^{4n^2}, \quad M(n, \boldsymbol{H}^C)=\boldsymbol{R}^{8n^2}$$

となっている．したがって，$X, Y\in M(n, K)$ に対し

(1)　$|X|\geqq 0$

(2)　$|X|=0 \quad \rightleftarrows \quad X=0$

(3)　$|\lambda X|=|\lambda||X| \qquad \lambda\in \boldsymbol{R}$

(4)　$|X+Y|\leqq |X|+|Y|$

がなりたっている．さらに

(5)　(i)　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のとき　　$|XY|\leqq |X||Y|$

　(ii)　$K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C$ のとき　　$|XY|\leqq \sqrt{2}|X||Y|$

　(iii)　$K=\boldsymbol{H}^C$ のとき　　$|XY|\leqq 2|X||Y|$

がなりたつ．実際，(5)(i)は実際に計算して容易に得られるので，これを既知とすれば，(5)(ii)，(iii)は次のようにして求められる．例えば $K=\boldsymbol{C}'$ のとき，命題1.19の写像 k'：$M(n, \boldsymbol{C}')\to MJ'(2n, \boldsymbol{R})\subset M(2n, \boldsymbol{R})$ は

$$|k'(X)|=\sqrt{2}|X| \qquad X\in M(n, \boldsymbol{C}')$$

をみたしている．よって，$\sqrt{2}|XY|=|k'(XY)|=|k'(X)k'(Y)|\leqq |k'(X)||k'(Y)|=2|X||Y|$ となる．$K=\boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C$ のときも同様である．$K=\boldsymbol{H}^C$ のときは，合成写像 $\tilde{k}$：

$$\tilde{k}: M(n, \boldsymbol{H}^C)\xrightarrow{k} M(2n, \boldsymbol{C}^C)\xrightarrow{k} M(4n, C)$$

（命題1.18）は

$$|\tilde{k}(X)|=2|X| \qquad X\in M(n, \boldsymbol{H}^C)$$

をみたしているので，同様にして証明することができる．

位相空間については以上の知識だけで十分であるが，後になって（G/H, G/N を考えるとき）些か困惑する所が生ずる．そこで，後での準備のため，一般の位相空間の定義をここで書いておく．

定義　集合 M に，次の 3 つの条件をみたす M の部分集合族 $\mathcal{O}$ が与えられているとする．

(1)　ϕ(空集合)$\in\mathcal{O}$，　$M\in\mathcal{O}$

(2)　$O_1, O_2\in\mathcal{O}$　ならば　$O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$

(3)　$O_\lambda\in\mathcal{O}, \lambda\in\Lambda$　ならば　$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathcal{O}$

このとき，$\mathcal{O}$ は M に**位相**を与える，または M は**位相空間**であるという．$\mathcal{O}$

に属する集合 O を M の**開集合**という．点 $x \in M$ を含む開集合を x の**近傍**という．M の部分集合 F に対し，補集合 $M-F$ が M の開集合であるとき，F は M の**閉集合**であるという．

定義　M を位相空間とし，N を M の部分集合とする：$N \subset M$．N の部分集合 U が，M のある開集合 O を用いて

$$U = N \cap O$$

と表わされるとき，U は N の開集合であると定義すると，N の開集合全体は N に位相を与える．このようにして得られた N の位相を，N の M に対する**相対位相**という．位相空間 M の部分集合 N を位相空間とみるには，常にこの相対位相を用いることにし，N は M の**部分空間**であるという．

定義　M を位相空間とする．

(1)　M の相異なる任意の 2 点 x, y に対して

$$U \cap V = \phi$$

をみたす x の近傍 U と y の近傍 V が存在するとき，M は **Hausdorff 空間**であるという．

(2)　M に次の性質をもつ可算個の開集合 $U_1, U_2, \cdots, U_k, \cdots$ が存在したとする：「M の任意の開集合 O および O の任意の点 x に対し，$x \in U_k \subset O$ となる U_k が存在する」．このとき，M は**可算開基**をもつ（または**第 2 可算公理**をみたす）という．

定義　M, N を位相空間とする．写像 $f: M \to N$ が次のいずれかの条件

(1)　N の任意の開集合 O に対して，$f^{-1}(O)$ は M の開集合である．

(2)　N の任意の閉集合 F に対して，$f^{-1}(F)$ は M の閉集合である．

をみたすとき，f は**連続**であるという．写像 $f: M \to N$ の連続性が定義されると，f が同相写像であること，および 2 つの位相空間 M, N が同相である定義を（前述のように）与えることができる．

定義　M, N を位相空間とする．直積集合 $M \times N$ の部分集合 O が，M の開集合 U_λ，N の開集合 $V_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ を用いて

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda)$$

と表わされるとき，O は $M \times N$ の開集合であると定義する．このとき $M \times N$ の開集合全体は $M \times N$ に位相を与える．この位相空間 $M \times N$ を M, N の**直積**という．

最後に多様体の定義を不十分ながら与えておこう．

定義　位相空間 M の各点 x が Euchid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ のある開集合 U と同相な近傍 O をもつとき，M は **n 次元（位相）多様体**であるという．（さらに，M が C^∞-可微分多様体であることの定義，および2つの C^∞-可微分多様体 M, N に対して，写像 $f: M \to N$ が C^∞-可微分であることの定義は省略する（〔11〕参照）．C^∞-可微分性の定義は省略したが，以下の話でこれを本質的に用いる所はない．C^∞-可微分性の所は連続性におきかえて読んでいって十分なのである）．

前書きが長くなってしまったが，本論にはいろう．

定理2.3　一般線型群 $GL(n, \boldsymbol{R}), GL(n, \boldsymbol{C}), GL(n, \boldsymbol{H})$ は Lie 群である．

証明　$GL(n, \boldsymbol{R})$ について証明しよう．まず，$GL(n, \boldsymbol{R})$ は行列の積に関して群であった．$GL(n, \boldsymbol{R})$ は $M(n, \boldsymbol{R})$ の開集合である．実際，写像 $f: M(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}, f(X) = \det X$ は連続である（行列式 $\det X$ は X の成分 $x_{ij}, i, j = 1, \cdots, n$ の多項式であるからである）．さて，$GL(n, \boldsymbol{R}) = f^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ であるから，$GL(n, \boldsymbol{R})$ は，$\boldsymbol{R}$ の開集合 $\boldsymbol{R} - \{0\}$ の連続写像 f による逆像として，$M(n, \boldsymbol{R})$ の開集合である（補題2.2）．よって，$GL(n, \boldsymbol{R})$ は，n^2 次元 C^∞-可微分多様体 $M(n, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^{n^2}$ の開集合として n^2 次元 C^∞-可微分多様体である．写像 $\mu: GL(n, \boldsymbol{R}) \times GL(n, \boldsymbol{R}) \to GL(n, \boldsymbol{R}), \mu(A, B) = AB$ が C^∞-可微分であることは，行列 AB の各成分は A, B の成分の多項式であることから明らかである．写像 $\nu: GL(n, \boldsymbol{R}) \to GL(n, \boldsymbol{R}), \nu(A) = A^{-1}$ の C^∞-可微分であることも，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ より，A^{-1} の各成分が A の成分の有理式であることから明らかである．以上で $GL(n, \boldsymbol{R})$ が Lie 群であることが分った．

$GL(n, \boldsymbol{C})$ は，$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{C}$ に置きかえて，$GL(n, \boldsymbol{R})$ のときと全く同様に証明できる．

$GL(n, \boldsymbol{H})$ のときには，これを行列式を用いて定義することができないので，同様というわけにはいかない．しかし，$GL(n, \boldsymbol{H})$ が $M(n, \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{R}^{4n^2}$ の開集合であることは証明できる（［9］定理8）ので，$GL(n, \boldsymbol{H})$ が $4n^2$ 次元 C^∞-可微分多様体であることはよい．また，$GL(n, \boldsymbol{H})$ の積算法 μ が C^∞-可微分であることは明らかである．写像 ν の C^∞-可微分であることは，命題1.17の写像 $k: M(n, \boldsymbol{H}) \to M(2n, \boldsymbol{C})$ が単射な写像 $k: GL(n, \boldsymbol{H}) \to GL(2n, \boldsymbol{C})$ を誘導し，かつ

$$A^{-1} = k^{-1}(k(A)^{-1})$$

となっていることから容易に分かることである．よって，$GL(n, \boldsymbol{H})$ は Lie 群

である．（あとで述べる Cartan の定理2.6を用いてもよい）．

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c)$ とする．行列 $A\in M(n, K)$ に対して，先に ${}^tA, \bar{A}, A^*\in M(n, K)$ を定義したが，これらは

$$(AB)^*=B^*A^* \qquad A, B\in M(n, K)$$

をみたし，さらに

$$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c \text{ のとき} \qquad {}^t(AB)={}^tB{}^tA,\ \ \overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$$

をみたしている．また，先に定義した行列 $J\in M(2n, K)$ のほかに，行列

$$I_m=\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\Big\}m \in M(n, K)$$

$(m=1, 2, \cdots, n-1)$ を定義しておく．

定義　$SL(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|\det A=1\}$　**複素特殊線型群**

$SU(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|A^*A=E, \det A=1\}$　**特殊 unitary 群**

$SL(n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})|\det A=1\}$　**実特殊線型群**

$SU(m, n-m)=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|A^*I_mA=I_m, \det A=1\}$

$SU^*(2n)=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C})|JA=\bar{A}J, \det A=1\}$

$O(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|{}^tAA=E\}$　**複素直交群**

$SO(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|{}^tAA=E, \det A=1\}$　**複素特殊直交群**

$O(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tAA=E\}$　**直交群**

$SO(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tAA=E, \det A=1\}$　**特殊直交群（回転群）**

$O(m, n-m)=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tAI_mA=I_m\}$　**$(m, n-m)$ 型 Lorentz 群**

$SO(m, n-m)=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tAI_mA=I_m, \det A=1\}$

$SO^*(2n)=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C})|JA=\bar{A}J, {}^tAA=E, \det A=1\}$

$Sp(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C})|{}^tAJA=J\}$　**複素 symplectic 群**

$Sp(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{H})|A^*A=E\}$　**symplectic 群**

$Sp(n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(2n, \boldsymbol{R})|{}^tAJA=J\}$　**実 symplectic 群**

$Sp(m, n-m)=\{A\in M(n, \boldsymbol{H})|A^*I_mA=I_m\}$

以上の他に，次の群も重要な群である．

$U(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|A^*A=E\}$　**unitary 群**

これらはすべて行列の積に関して群である．それには，$A, B\in M(n, K)$ が

$$AB=E \text{ ならば } BA=E,\ \text{したがって } B=A^{-1}$$

(補題2.1)を用いると容易に分かることである．例として $Sp(n,\boldsymbol{R})$ が群になることを示してみよう．$A, B\in Sp(n,\boldsymbol{R})$，すなわち ${}^tAJA=J$，${}^tBJB=J$ ならば ${}^t(AB)J(AB)={}^tB{}^tAJAB={}^tBJB=J$ より，$AB\in Sp(n,\boldsymbol{R})$ である．また，${}^tAJA=J$ より $(J^{-1}{}^tAJ)A=E$ となるので，補題2.1より，A は正則である．そこで，${}^tAJA=J$ の左，右にそれぞれ ${}^tA^{-1}, A^{-1}$ を掛けて $J={}^tA^{-1}JA^{-1}$ となり，$A^{-1}\in Sp(n,\boldsymbol{R})$ が示される．よって，$Sp(n,\boldsymbol{R})$ は $GL(2n,\boldsymbol{R})$ の部分群であり，特に群である．

定義　一般線型群 $GL(n,\boldsymbol{R}), GL(n,\boldsymbol{C}), GL(n,\boldsymbol{H})$ の閉部分群 G を**線型 Lie 群**という．(G が $GL(n,K)$ の閉部分群であるとは，G が $GL(n,K)$ の部分群であり，かつ，G が $GL(n,K)$ の閉集合であることである)．

補題2.4　$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}',\boldsymbol{H}',\boldsymbol{C}^c,\boldsymbol{H}^c)$ とする．$M(n,K)$ において

$$\lim_{k\to\infty}A_k=A, \lim_{k\to\infty}B_k=B \quad ならば \quad \lim_{k\to\infty}A_kB_k=AB$$

がなりたつ．

証明　これは，AB の各成分が A, B の成分の多項式で表わされるから明らかであるといえるが，次のようにして証明しておこう．収束する点列は有界であるから，$|A_k|\leqq a(k=1,2,\cdots)$ をみたす正数 a が存在することを既知として，

$$\begin{aligned}|A_kB_k-AB|&=|A_k(B_k-B)+(A_k-A)B|\\&\leqq 2|A_k||B_k-B|+2|A_k-A||B|\\&\leqq 2a|B_k-B|+2|A_k-A||B|\\&\to 0 \qquad (k\to\infty)\end{aligned}$$

となるからである．

定理2.5　$SL(n,\boldsymbol{C}), SU(n), SL(n,\boldsymbol{R}), SU(m,n-m), SU^*(2n), O(n,\boldsymbol{C}), SO(n,\boldsymbol{C}), O(n), SO(n), O(m,n-m), SO(m,n-m), SO^*(2n), Sp(n,\boldsymbol{C}), Sp(n), Sp(n,\boldsymbol{R}), Sp(m,n-m), U(n)$ はいずれも線型 Lie 群である．

証明　これらの群 $G(G\subset GL(n,K)$ とする$)$ が $GL(n,K)$ の閉集合であることは，G が行列の積や行列式で定義されているから容易に分かることである．念のため，$SU(n)$ が $GL(n,\boldsymbol{C})$ の閉集合であることを証明しておこう．$A_k\in SU(n)$ が $\lim_{k\to\infty}A_k=A\in GL(n,\boldsymbol{C})$ ならば，$\lim_{k\to\infty}A_k{}^*=A^*$ となるので

$$A^*A=\lim_{k\to\infty}A_k{}^*\lim_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_k{}^*A_k=\lim_{k\to\infty}E=E$$

となり（補題2.4），かつ

$$\det A = \det \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \det A_k = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

となるから，$A \in SU(n)$ である．これは $SU(n)$ が $GL(n, \boldsymbol{C})$ の閉集合であることを示している．

Lie 群について次の重要な定理がなりたつ．

定理*2.6 (E. Cartan)　Lie 群 G の閉部分群 H はまた Lie 群である．

証明は省略する（[1] 定理2.27，[2] IV章）．Lie 群の詳細な定義を与えていないので，ここでこの証明を与えることができないし，また，それ程簡単に導ける定理でもないので認めることにする．

$GL(n, \boldsymbol{H})$ は，命題1.17の写像 k を通して Lie 群 $GL(2n, \boldsymbol{C})$ の閉部分群 $\{A \in GL(2n, \boldsymbol{C}) | JA = \bar{A}J\}$ と同一視すると，定理2.4より Lie 群の構造をもつことがわかる．さて，$GL(n, \boldsymbol{R})$, $GL(n, \boldsymbol{C})$, $GL(n, \boldsymbol{H})$ は Lie 群であった（定理2.3）から，定理2.6より次の定理を得る．

定理2.7　線型 Lie 群は Lie 群である．

定理2.7の逆はなりたたない．すなわち，線型 Lie 群でない Lie 群が存在する．(例えば，$SL(n, \boldsymbol{R})$ の普遍被覆 Lie 群 $\widetilde{SL}(n, \boldsymbol{R})$ は線型 Lie 群でない* ことが知られている．すなわち，どんな大きい自然数 N をとっても，$\widetilde{SL}(n, \boldsymbol{R})$ は $GL(N, \boldsymbol{R})$ の閉部分群にならないのである)．

定義　(1)　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．$GL(n, K)$ の部分群 G が代数方程式で定義されているとき，すなわち，n^2 個の変数 x_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ の K の元を係数にもつ多項式 $P_\lambda \in K[\cdots, x_{ij}, \cdots]$, $\lambda \in \Lambda$ を用いて

$$G = \left\{ \left(a_{ij} \right) \in M(n, K) | P_\lambda(\cdots, a_{ij}, \cdots) = 0, \lambda \in \Lambda \right\}$$

で定義されるとき，G を K-**代数群**であるという．$K = \boldsymbol{R}$ のとき G を**実代数群**，$K = \boldsymbol{C}$ のとき G を**複素代数群**という．

(2)　$GL(n, \boldsymbol{C})$ の部分群 G が $2n^2$ 個の変数 x_{ij}, y_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ の実数係数の多項式 $P_\lambda \in \boldsymbol{R}[\cdots, x_{ij}, y_{ij}, \cdots]$ を用いて

$$G = \left\{ \left(a_{ij} + b_{ij}\boldsymbol{i} \right) \in M(n, \boldsymbol{C}) | P_\lambda(\cdots, a_{ij}, b_{ij}, \cdots) = 0, \lambda \in \Lambda \right\}$$

で定義されるとき，G は $GL(n, \boldsymbol{C})$ の**準代数群**であるという．

(3)　$GL(n, \boldsymbol{H})$ の部分群 G が $4n^2$ 個の変数 x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, t_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$ の実数係数の多項式 $P_\lambda \in \boldsymbol{R}[\cdots, x_{ij}, y_{ij}, s_{ij}, t_{ij}, \cdots]$ を用いて

$$G = \left\{ \left(a_{ij} + b_{ij}\boldsymbol{i} + c_{ij}\boldsymbol{j} + d_{ij}\boldsymbol{k} \right) \in M(n, \boldsymbol{H}) | P_\lambda(\cdots, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, \cdots) = 0, \lambda \in \Lambda \right\}$$

で定義されるとき，G は $GL(n, \boldsymbol{H})$ の**準代数群**であるという．

明らかに，代数群，準代数群は線型 Lie 群である．また，$GL(n, \boldsymbol{C})$ の複素代数群は $GL(n, \boldsymbol{C})$ の準代数群である．

定 理2.8　(1)　$SL(n, \boldsymbol{R}), O(n), SO(n), O(m, n-m), SO(m, n-m), Sp(n, \boldsymbol{R})$ は実代数群である．

(2)　$SL(n, \boldsymbol{C}), O(n, \boldsymbol{C}), SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(n, \boldsymbol{C})$ は複素代数群である．

(3)　$U(n), SU(n), SU(m, n-m)$ は $GL(n, \boldsymbol{C})$ の，$SU^*(2n), SO^*(2n)$ は $GL(2n, \boldsymbol{C})$ の準代数群である．

(4)　$Sp(n), Sp(m, n-m)$ は $GL(n, \boldsymbol{H})$ の準代数群である．

証明　群を定義する式を行列の成分，(さらに実数成分)で表示してみると明らかである．

これからは今までに定義した群を調べるのが目的であるが，そのために，次の群も定義しておくと便利である．

定義　$U(n, K)=\{A\in M(n, K)|A^*A=E\}, K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$

$U(m, n-m, K)=\{A\in M(n, K)|A^*I_mA=I_m\}, K=\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$

$SU(n, K)=\{A\in M(n, K)|A^*A=E,\ \det A=1\}, K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$

$SU(m, n-m, K)=\{A\in M(n, K)|A^*I_mA=I_m, \det A=1\}, K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$

$SU^*(2n, K)=\{A\in M(2n, K)|JA=\bar{A}J, \det A=1\}, K=\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^c$

$O(m, n-m, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|{}^tAI_mA=I_m\}$

$SO(m, n-m, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})|{}^tAI_mA=I_m, \det A=1\}$

$SO^*(2n, \boldsymbol{C}^c)=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C}^c)|JA=\bar{A}J, {}^tAA=E, \det A=1\}$

$Sp(n, K)=\{A\in M(n, K)|A^*A=E\}, K=\boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}^c$

$Sp(m, n-m, K)=\{A\in M(n, K)|A^*I_mA=I_m\}, K=\boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}^c$

これらの群は，Lie 群 $GL(n, K)=\{A\in M(n, K)|A$ は正則$\}, K=C, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c$ の閉部分群として線型 Lie 群とみなせるものである．

最後に，$GL(n, \boldsymbol{C}), SL(n, \boldsymbol{C}), O(n, \boldsymbol{C}), SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(n, \boldsymbol{C})$ について，説明なしに一言述べておく．

定義*　群 G が，次の 2 つの条件

(1)　G は複素多様体である

(2)　写像 $\mu: G\times G\to G, \mu(a, b)=ab$ および写像 $\nu: G\to G, \nu(a)=a^{-1}$ は解析的である

をみたすとき，G は**複素 Lie 群**であるという．

定 理*2.9　$GL(n, \boldsymbol{C}), SL(n, \boldsymbol{C}), O(n, \boldsymbol{C}), SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(n, \boldsymbol{C})$ は複素

Lie 群である.

（リレー夜話）

私と数学

現在，数学は人間が学ぶには余りにも難かしくなり過ぎています．それは歴史が超人的な天才を数多く生んで来たからです．きっとこれからもそうあり続けるでしょう．当然私は凡人でしたが，凡人流に私なりの数学を学ぶ機会を得たことを感謝しています．さて，本書に空白ができましたので，その空白を埋めるために，私の数学への関わりについて書きたいと思います．

（**小学校時代** 6 年） 遠い昔のことで記憶は定かでありませんが，勉強した覚えがありません．そうかといって，よく遊ぶこともできず，偏食がひどく，我が儘に育てられ，私のよくない性格，虚弱な体質はこの時に作られたような気がします．もし将来生れ変って自分という人間が生ずることがあるならば，今度は「よく学び，よく遊ぶ」を実行したいものです．

（大阪府立旧制**八尾中学時代** 5 年） 小学校では勉強しない割には成績は良い方で，4 — 5 倍の倍率の中学へ合格することができました．さて，合格発表から入学式までの間に 1 ケ月程ありましたが，その間に女学生であった姉の教科書「代数学」，「幾何学」とその副読本を読み上げました．これが私の勉強し始めのようです．このためか，数学の授業もよく分かり，数学に苦しむ同級生が多い中で私は数学ができるということになっていました．中学 3 年の時，同級に北村という大学数学教授の息子がいて，どういうわけか私に微分，積分の本をくれました．ハードカバーの良い紙質の本で，これを大そう興味深く読みました．ある時，テストで関数の最大値を求めるのに微分を用いました所，これを数学の三上章先生（東大機械科卒で，後に文学博士を取り大学教授になった変り種で人気のあった先生）が褒めてくれました．それ以後，放物線の頂点を求めるような簡単なときにも微分を使っていました．授業で習わないものを使って生意気だったと思いますが，すべての数学の先生にも認めてもらっていました．これが高じて積分の演習本を買ってきて読み，技術的に相当難解なものでも計算できる力をつけることができていました（中学 3 年の12月第 2 次世界大戦が始まりました）．

（旧制**大阪高校時代** 3 年） 難関の高校にはいって受験勉強から開放され

（p. 38 へつづく）

3． Lie 群の同型

群論では，同型な群は同じものとみなすことになっている．そして，与えられた群 G を調べるのに，G と同型な群 G' に置き換えて調べるのもよく用いられる手法である．ここでは，前章の線型 Lie 群と後半にあげた線型 Lie 群の間にいくつかの同型が存在することを示すことを目的とする．

定義 (1) G，G' を群とする．写像 $f: G \to G'$ が

$$f(ab)=f(a)f(b) \qquad a,b \in G$$

をみたすとき，f は**群準同型写像**であるという．さらに，f が全単射であるとき，f は**群同型写像**であるという．G，G' の間に群同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G，G' は**群として同型**であるといい，$G \cong G'$ で表わす．

(2) G，G' を位相群とする．写像 $f: G \to G'$ が群同型写像であり，かつ，f が同相写像であるとき，f は**位相群同型写像**であるという．G，G' の間に位相群同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G，G' は**位相群として同型**であるといい，$G \cong G'$ で表わす．

(3) G，G' を Lie 群とする．写像 $f: G \to G'$ が群同型写像であり，かつ，f が C^∞-可微分同相同像（f およびその逆写像 g がともに C^∞-可微分写像であること）のとき，f は**Lie 群同型写像**という．G，G' の間に Lie 群同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G，G' は **Lie 群として同型**であるといい，$G \cong G'$ で表わす．

Lie 群の間の群準同型写像に関して次の定理がなりたつ．

定理*3.1 G，G' を Lie 群とする．$f: G \to G'$ が連続な群準同型写像ならば，f は C^∞-可微分（群準同型写像）になる．

証明は省略する（〔6〕定理4.25）．この定理は，2つの Lie 群 G，G' が Lie 群として同型であることを示すには，G，G' が位相群として同型であることを示せば十分であることを教えている．以下に，いくつかの Lie の同型を示すが，その同型を与える写像 f およびその逆写像 g の連続性は自明なものばかりであるので，一々言及していない．

定理3.2　(1)　$U(n, \boldsymbol{C}') \cong U(m, n-m, \boldsymbol{C}') \cong GL(n, \boldsymbol{R})$

(2)　$U(n, \boldsymbol{C}^c) \cong U(m, n-m, \boldsymbol{C}^c) \cong GL(n, C)$

証明　(1)　写像 $f: GL(n, \boldsymbol{R}) \to U(n, \boldsymbol{C}')$,

$$f(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA^{-1}) + \frac{\boldsymbol{i}'}{2}(A - {}^tA^{-1})$$

$$= \iota A + \overline{\iota}\,{}^tA^{-1} \qquad\qquad \iota = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{i}')$$

が群同型対応を与えている．これを示そう．ι は

$$\iota^2 = \iota, \quad \overline{\iota}^2 = \overline{\iota}, \quad \iota\overline{\iota} = \overline{\iota}\iota = 0, \quad \iota + \overline{\iota} = 1$$

をみたしていたことを思い出そう(命題1.8)．まず，$f(A) \in U(n, \boldsymbol{C}')$ である．実際，

$$f(A)^* f(A) = (\overline{\iota}\,{}^tA + \iota A^{-1})(\iota A + \overline{\iota}\,{}^tA^{-1})$$
$$= \iota A^{-1}A + \overline{\iota}\,{}^tA\,{}^tA^{-1} = (\iota + \overline{\iota})E = E$$

である．つぎに，f は群準同型写像である．実際，

$$f(A)f(B) = (\iota A + \overline{\iota}\,{}^tA^{-1})(\iota B + \overline{\iota}\,{}^tB^{-1})$$
$$= \iota AB + \overline{\iota}\,{}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1} = \iota AB + \overline{\iota}\,{}^t(AB)^{-1}$$
$$= f(AB)$$

である．f の逆写像 $g: U(n, \boldsymbol{C}') \to GL(n, \boldsymbol{R})$ は

$$g(P + Q\boldsymbol{i}') = P + Q \qquad P, Q \in M(n, \boldsymbol{R})$$

で与えられる．これを示そう．まず，$P + Q \in GL(n, \boldsymbol{R})$ である．実際，$P + Q\boldsymbol{i}' \in U(n, \boldsymbol{C}')$ の条件，$(P + Q\boldsymbol{i}')^*(P + Q\boldsymbol{i}') = E$，すなわち，$({}^tP - {}^tQ\boldsymbol{i}')(P + Q\boldsymbol{i}') = E$ は

$${}^tPP - {}^tQQ = E, \quad -{}^tQP + {}^tPQ = 0$$

である．これより，${}^t(P - Q)(P + Q) = {}^tPP - {}^tQQ - {}^tQP + {}^tPQ = E$ となるので，$P + Q \in GL(n, \boldsymbol{R})$ であり，かつ

$$(P + Q)^{-1} = {}^t(P - Q)$$

となる．$gf = 1$，$fg = 1$ がなりたつ．実際，

$$gf(A) = g\Big(\frac{1}{2}(A + {}^tA^{-1}) + \frac{1}{2}(A - {}^tA^{-1})\boldsymbol{i}'\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(A + {}^tA^{-1}) + \frac{1}{2}(A - {}^tA^{-1}) = A,$$

$$fg(P + Q\boldsymbol{i}') = f(P + Q)$$
$$= \frac{1}{2}((P + Q) + {}^t(P + Q)^{-1}) + \frac{1}{2}((P + Q) - {}^t(P + Q)^{-1})\boldsymbol{i}'$$

$$=\frac{1}{2}((P+Q)+(P-Q))+\frac{1}{2}((P+Q)-(P-Q))\boldsymbol{i}'$$
$$=P+Q\boldsymbol{i}'$$

である．f，g が連続写像であることは明らかである．以上で，$GL(n,\boldsymbol{R})\cong U(n,\boldsymbol{C}')$ が証明された．同様に，写像 f：$GL(n,\boldsymbol{R})\to U(m,n-m,\boldsymbol{C}')$,

$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}I_m{}^tA^{-1}I_m \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{i}')$$

が群同型対応を与えている．f の逆写像 g：$U(m,n-m,\boldsymbol{C}')\to GL(n,\boldsymbol{R})$ は

$$g(P+Q\boldsymbol{i}')=P+Q \qquad P,Q\in M(n,\boldsymbol{R})$$

で与えられる．

(2)は(1)の結果であるといえる．実際，写像 f：$GL(n,C)\to U(n,\boldsymbol{C}^c)$,

$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}\,{}^tA^{-1} \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$

が群同型対応を与えている．f の逆写像 g：$U(n,\boldsymbol{C}^c)\to GL(n,C)$ は

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q \qquad P,Q\in M(n,C)$$

で与えられる．同様に，f：$GL(n,C)\to U(m,n-m,\boldsymbol{C}^c)$,

$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}I_m{}^tA^{-1}I_m \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$

は群同型写像であり，その逆写像 g：$U(m,n-m,\boldsymbol{C}^c)\to GL(n,C)$ は

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q \qquad P,Q\in M(n,C)$$

である．

定理3.3　(1)　$SU(n,\boldsymbol{C}')\cong SU(m,n-m,\boldsymbol{C}')\cong SL(n,\boldsymbol{R})$,

$SU^*(2n,\boldsymbol{C}')\cong SL(2n,\boldsymbol{R})$

(2)　$SU(n,\boldsymbol{C}^c)\cong SU(m,n-m,\boldsymbol{C}^c)\cong SL(n,C)$,

$SU^*(2n,\boldsymbol{C}^c)\cong SL(2n,C)$

証明　(1)　定理3.2と同じ写像 f：$SL(n,\boldsymbol{R})\to SU(n,\boldsymbol{C}')$,

$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}\,{}^tA^{-1} \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{i}')$$

が群同型対応を与えている．これを示そう．まず，$f(A)\in SU(n,\boldsymbol{C}')$ である．実際，$f(A)\in U(n,\boldsymbol{C}')$ はよい（定理3.2）が，$\det f(A)=1$ を示さなければならない．

補題3.4　$M(n,\boldsymbol{C}')$ において

$$X=\iota A+\bar{\iota}B \quad \text{ならば} \quad \det X=\iota\det A+\bar{\iota}\det B$$

がなりたつ．($M(n,\boldsymbol{C}^c)$ においても，$\iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$ として同様のことがなりた

つ)．

証明　$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，$B=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，$\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i\in\boldsymbol{C}'^n$ と表わすとき（行列式は行列の各列に関して $\boldsymbol{C}'$-線型性をもつので）

$$\begin{aligned}\det X&=\det(\iota\boldsymbol{a}_1+\overline{\iota}\boldsymbol{b}_1,\cdots,\iota\boldsymbol{a}_n+\overline{\iota}\boldsymbol{b}_n)\\&=\det(\iota\boldsymbol{a}_1,\cdots,\iota\boldsymbol{a}_n)+\det(\overline{\iota}\boldsymbol{b}_1,\cdots,\overline{\iota}\boldsymbol{b}_n)\qquad(\iota\overline{\iota}=0)\\&=\iota^n\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\overline{\iota}^n\det(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\\&=\iota\det A+\overline{\iota}\det B\end{aligned}$$

となる．

定理3.3の証明にもどろう．補題3.4より

$$\det f(A)=\det(\iota A+\overline{\iota}\,{}^tA^{-1})=\iota\det A+\overline{\iota}\det{}^tA^{-1}=\iota 1+\overline{\iota}1=1$$

となる．以上で $f(A)\in SU(n,\boldsymbol{C}')$ が示された．f が群準同型写像であることは既に定理3.2で示した．f の逆写像 $g: SU(n,\boldsymbol{C}')\to SL(n,\boldsymbol{R})$ は定理3.2と同様に

$$g(P+Q\boldsymbol{i}')=P+Q\qquad P,Q\in M(n,\boldsymbol{R})$$

で与えられる．そのためには，$g(P+Q\boldsymbol{i}')\in SL(n,\boldsymbol{R})$，すなわち $\det(P+Q)=1$ を示さなければならない．

補題3.5　$P(x_1,\cdots,x_m)$ を整数係数の多項式とする．$p_i+q_i\boldsymbol{i}'\in\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{C}'$ に対し，$P(p_1+q_1\boldsymbol{i}',\cdots,p_m+q_m\boldsymbol{i}')=1$ ならば $P(p_1+q_1,\cdots,p_m+q_m)=1$ となる．($p_i+iiq_i\in C\oplus iiC=\boldsymbol{C}^c$ としても同様のことがなりたつ)．

証明

$$\sum(p+q\boldsymbol{i}')(r+s\boldsymbol{i}')=1\qquad p,q,r,s\in\boldsymbol{R}$$

とすると，$\sum(pr+qs)+\sum(qr+ps)\boldsymbol{i}'=1$ となるので

$$\sum(pr+qs)=1,\ \ \sum(qr+ps)=0$$

を得る．これより

$$\sum(p+q)(r+s)=\sum(pr+qs)+\sum(qr+ps)=1+0=1$$

となる．このような計算をもう少し一般化すれば，補題を証明することができる．

再び定理3.3の証明にもどろう．補題3.5は $\det(P+\boldsymbol{i}'Q)=1$ ならば $\det(P+Q)=1$ がなりたつことを示している．以上で，$SL(n,\boldsymbol{R})\cong SU(n,\boldsymbol{C}')$ が証明された．同様に，写像 $f: SL(n,\boldsymbol{R})\to SU(m,n-m,\boldsymbol{C}')$，

$$f(A)=\iota A+\overline{\iota}I_m{}^tA^{-1}I_m$$

が群同型対応を与えており，その逆写像 $g: SU(m,n-m,\boldsymbol{C}')\to SL(n,\boldsymbol{R})$ は

$$g(P+Q\boldsymbol{\iota}')=P+Q\qquad P,Q\in M(n,\boldsymbol{R})$$

で与えられる．さらに，$f: SL(2n,\boldsymbol{R})\to SU^*(2n,\boldsymbol{C}')$

$$f(A)=\iota A-\bar{\iota}JAJ \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{i}')$$

が群同型写像であり，その逆写像 $g: SU^*(2n, \boldsymbol{C}') \to SL(2n, \boldsymbol{R})$ は

$$g(P+Q\boldsymbol{i}')=P+Q \qquad P, Q \in M(2n, \boldsymbol{R})$$

である．

(2)は(1)の結果であるといえる．実際，写像 $f: SL(n, C) \to SU(n, \boldsymbol{C}^c)$，$f: SL(n, C) \to SU(m, n-m, \boldsymbol{C}^c)$，$f: SL(2n, C) \to SU^*(2n, \boldsymbol{C}^c)$，

$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}\,{}^tA^{-1}$$
$$f(A)=\iota A+\bar{\iota}I_m{}^tA^{-1}I_m \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$
$$f(A)=\iota A-\bar{\iota}JAJ$$

がそれぞれの群同型対応を与えている．

定理3.6　(1)　$Sp(n, \boldsymbol{H}') \cong Sp(m, n-m, \boldsymbol{H}') \cong Sp(n, \boldsymbol{R})$

(2)　$Sp(n, \boldsymbol{H}^c) \cong Sp(m, n-m, \boldsymbol{H}^c) \cong Sp(n, C)$

証明　(1)　命題1.17の $\boldsymbol{R}$-多元環同型写像 $k: M(n, \boldsymbol{H}') \to MJ(2n, \boldsymbol{C}')$ と定理3.2の群同型写像 $g: U(2n, \boldsymbol{C}') \to GL(2n, \boldsymbol{R})$ を用いる．この k と g は

$$k(D^*)=k(D)^* \qquad D \in M(n, \boldsymbol{H}')$$
$$g(J)=J,\ \ g({}^tB)={}^tg(B) \qquad B \in U(2n, \boldsymbol{C}')$$

をみたしていることに注意しよう．さて，合成写像 $f_1=gk: Sp(n, \boldsymbol{H}') \to Sp(n, \boldsymbol{R})$ が群同型反応を与えている．実際，

$$\begin{aligned} Sp(n, \boldsymbol{H}') &= \{D \in M(n, \boldsymbol{H}') \mid D^*D=E\} \\ &\overset{k}{\to} \{B \in M(2n, \boldsymbol{C}') \mid B^*B=E, JB=\bar{B}J\} \\ &= \{B \in M(2n, \boldsymbol{C}') \mid B^*B=E, {}^tBJB=J\} \\ &= \{B \in U(2n, \boldsymbol{C}') \mid {}^tBJB=J\} \\ &\overset{g}{\to} \{A \in GL(2n, \boldsymbol{R}) \mid {}^tAJA=J\} = Sp(n, \boldsymbol{R}) \end{aligned}$$

である．$n=1$ のときを具体的に書いてみよう．写像 $f_1: Sp(1, \boldsymbol{H}') \to Sp(1, \boldsymbol{R}) = SL(2, \boldsymbol{R})$，

$$f_1(x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}')=\begin{pmatrix} x+y & s+t \\ -s+t & x-y \end{pmatrix}$$

$(x, y, s, t \in \boldsymbol{R},\ x^2-y^2+s^2-t^2=1)$ は群同型対応を与えている．ちなみに，f_1 の逆写像 $g_1: Sp(1, \boldsymbol{R}) \to Sp(1, \boldsymbol{H}')$ は

$$g_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{2}((a+d)+(a-d)\boldsymbol{i}'+(b-c)\boldsymbol{j}+(b+c)\boldsymbol{k}')$$

$(a, b, c, d \in \boldsymbol{R},\ ad-bc=1)$ である．

$Sp(m, n-m, \boldsymbol{H}') \cong Sp(n, \boldsymbol{R})$ も同様であるが再記しよう．

$$Sp(m,n-m,\boldsymbol{H}')=\{D\in M(n,\boldsymbol{H}')\,|\,D^*I_mD=I_m\}$$
$$\overset{k}{\to}\{B\in M(2n,\boldsymbol{C}')\,|\,B^*I_{2m}B=I_{2m},\ \ JB=\overline{B}J\}$$
$$=\{B\in M(2n,\boldsymbol{C}')\,|\,B^*I_{2m}B=I_{2m},\ {}^tBJI_{2m}B=JI_{2m}\}$$

しかるに，$J'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ に対して $J'JJ'=-J$ となるから

$$J'_m=\begin{pmatrix}J'&&&&\\&\ddots&&&\\&&J'&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{pmatrix}\Big\}m$$

とおくと $J'_mJJ'_m=JI_{2m}$ となる．よって，B に $J'_mBJ'_m$ を対応させることにより

$$\cong\{B\in M(2n,\boldsymbol{C}')\,|\,B^*I_{2m}B=I_{2m},\ {}^tBJB=J\}$$
$$=\{B\in U(2m,2n-2m,\boldsymbol{C}')\,|\,{}^tBJB=J\}$$
$$\overset{g}{\to}\{A\in GL(2n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tAJA=J\}=Sp(n,\boldsymbol{R})$$

(2)は(1)の結果であるといえる．(1)の写像 k の複素化と定理3.2(2)の写像 g を用いればよい．

定理3.7　(1)　$O(m,n-m,\boldsymbol{C})\cong O(n,\boldsymbol{C})$，$SO(m,n-m,\boldsymbol{C})\cong SO(n,\boldsymbol{C})$

(2)　$SO^*(2n,\boldsymbol{C}^c)\cong SO(2n,C)$

証明　(1)　$\Gamma_m=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&&&&\\&\ddots&&&\\&&\boldsymbol{i}&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{pmatrix}\Big\}m\in M(n,\boldsymbol{C})$ とおくとき，$\Gamma_m{}^2=I_m$，${}^t\Gamma_m=\Gamma_m$ であることに注意すると，写像 f：$O(m,n-m,\boldsymbol{C})\to O(n,\boldsymbol{C})$，$f$：$SO(m,n-m,\boldsymbol{C})\to SO(n,\boldsymbol{C})$，

$$f(A)=\Gamma_mA\Gamma_m{}^{-1}$$

が群同型対応を与えていることが分かる．

(2)　写像 f：$SO(2n,C)\to SO^*(2n,\boldsymbol{C}^c)$，

$$f(A)=\iota A-\tau JAJ\qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$

が群同型対応を与えている（定理3.3参照）．f の逆写像 g：$SO^*(2n,\boldsymbol{C}^c)\to SO(2n,C)$ は

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q\qquad P,Q\in M(2n,C)$$

である．

次の群同型は後で用いるので，ここで与えておく．

定理3.8　(1)　$Sp(n, \boldsymbol{R}) \cap O(2n) \cong U(n)$

(2)　$Sp(n, \boldsymbol{C}) \cap U(2n) \cong Sp(n)$

証明　(1)　$U(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) | A^*A = E\}$

$$\overset{k}{\to} \{B \in M(2n, \boldsymbol{R}) | {}^tBB = E, JB = BJ\}$$

$$= \{B \in M(2n, \boldsymbol{R}) | {}^tBJB = J, {}^tBB = E\}$$

$$= Sp(n, \boldsymbol{R}) \cap O(2n) \quad \text{(命題1.17)}$$

(2)は(1)と同様であるが再記しよう．

$$Sp(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) | A^*A = E\}$$

$$\overset{k}{\to} \{B \in M(2n, \boldsymbol{C}) | B^*B = E, JB = \overline{B}J\}$$

$$= \{B \in M(2n, \boldsymbol{C}) | {}^tBJB = J, B^*B = E\}$$

$$= Sp(n, \boldsymbol{C}) \cap U(2n) \quad \text{(命題1.17)}$$

最後に，自明な群同型

$$O(m, n-m) \cong O(n-m, m)$$

$$SO(m, n-m) \cong SO(n-m, m)$$

$$SU(m, n-m) \cong SU(n-m, m)$$

$$Sp(m, n-m) \cong Sp(n-m, m)$$

があることを注意しておく．

自由な気持になりました．数学では竹内端三の関数論や高木貞治の解析概論の一部を読み，特に留数計算は原始関数を求めなくても積分値を求められることに驚き，ある種の感動を覚えました．また，川端直太郎先生から先生の訳書である Kuratowski の「位相数学」を頂き，この始めの方を読み，位相空間，閉集合，開集合，連続写像について形式的には理解できるようになっていました．今から思えばすべて恥しい理解度のものばかりですが，私には数学は面白く魅力的なものであると感じられました．射影幾何学も勉強したものの1つで，これは今でも役立っています（高校2年の夏終戦になりました）．

（旧制**大阪大学時代** 3 年） 高校の時，物理にも興味をもちましたが，色弱のため理科系には進学できないので，迷わず数学科へ進学しました．1年次は代数学（正田健次郎教授），幾何学（寺阪英孝教授），解析学（南雲道夫教授），線型代数（浅野啓三助教授）の必修授業がありました．私には若干の数学知識があるので，大学の授業は十分分かるだろうと思っていましたが，すべて見事に裏切られました．授業の進度が早く，説明が丁寧でないため分からず，これは場違いの大変な所へ来てしまったと後悔したものです．当時，父が病で寝込み，家計が極貧の状態に落ち込んでいたため，大学をやめることばかり考えていました．それでも1年次は下宿していましたので結構勉強しました．図書館から原書を貸り出して読み，授業の分からない分を補っていました．

2 年次からは大学の寮にはいりました．寮は（数学科の学生には）遊ぶ所であって勉強する所ではないようです．麻雀を覚え，碁の腕をあげました．医学部，工学部の学生が真面目に大学へ通う中，数学科の学生と物理学科の一部の学生は昼間から寮にゴロゴロしていて，5時の夕食の鈴が鳴ると食堂に集まるのは決ってこれらの連中でした．大学の授業も（安西広忠先生の講義を除いて）殆んどさぼっていました．しかし，ただ1つ Pontrjagin の旧版「位相群」を自分で読んでおり，点列 compact で書かれている所を有限開被覆が選べるという所謂 compact に直して読み，何かよいことをしているような気になっていました．安西先生の位相群の講義で，ある時「それには Hausdorff を仮定していますか」と質問しました所「位相群に Hausdorff を仮定するのは当り前だ」と一言のもとに退けられてしまいました．それ以後「数学で条件を少々弱めることは枝葉末節である」と肝に銘ずることになり，現在でもそう信じています．

（p. 50 へつづく）

4. 線型 Lie 群の Lie 環

Lie 群の構造を調べるにはどうしても Lie 環の知識が必要となる（というよりも便利であるというべきかもしれない）．まず，Lie 環の定義から始めよう．

定義 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．有限次元 K-ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の任意の 2 つの元 X, Y に対して $\mathfrak{g}$ の元 $[X, Y]$ が一意に定まり，次の 4 つの条件

(1) $[X+Y, Z]=[X, Z]+[Y, Z]$

(2) $[\lambda X, Y]=\lambda[X, Y] \quad \lambda\in K$

(3) $[X, Y]=-[Y, X]$

$X, Y, Z\in\mathfrak{g}$

(4) $[X,[Y, Z]]+[Y,[Z, X]]+[Z,[X, Y]]=0$

がなりたつとき，$\mathfrak{g}$ は **K-Lie 環**であるという．$K=\boldsymbol{R}$ のとき $\mathfrak{g}$ を**実 Lie 環**，$K=\boldsymbol{C}$ のとき $\mathfrak{g}$ を**複素 Lie 環**という．

Lie 群 G に対して Lie 環 $\mathfrak{g}$ が対応することを示そう．それは Lie 群 G の局所的な性質（G の単位元 1 の近くの性質のこと）を表示するものである．一般の Lie 群 G に対しては

「Lie 群 G の左不変なベクトル場 X 全体のつくる $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に積を $[X, Y]=XY-YX$ で定義したもの」

として G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を定義するのが普通である（[2] 参照）．しかし，G が線型 Lie 群であるときには指数行列を用いて次のように定義するする方が分かりやすいようである．

定義 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．行列 $X\in M(n, K)$ に対し，行列 $\exp X\in M(n, K)$ を

$$\exp X=E+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\cdots+\frac{X^m}{m!}+\cdots$$

で定義し，$\exp X$ を X の**指数行列**という．

行列 $\exp X$ を無限級数の形で定義しているので，この級数が収束することを示さなければならない．$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のとき，$|X|=x$ とおくと $|X^m|\leqq|X|^m$

$=x^m$ となるので，すべての m に対して

$$\left|E+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots+\frac{X^m}{m!}\right|\leqq|E|+|X|+\frac{|X^2|}{2!}+\cdots+\frac{|X^m|}{m!}$$

$$\leqq\sqrt{n}+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^m}{m!}+\cdots=\sqrt{n}-1+e^x$$

となる．よって，$E+X+\dfrac{X^2}{2!}+\cdots+\dfrac{X^m}{m!}+\cdots$ は絶対収束し，したがって収束する．($K=\boldsymbol{C}',\boldsymbol{H}',\boldsymbol{C}^C,\boldsymbol{H}^C$ のときには，$|X^m|\leqq 2^{m-1}|X|^m\leqq(2x)^m$ となるので，上記の計算で，x を $2x$ に置きかえる必要がある．命題1.17，1.18，1.19の写像 k，k' を用いて証明することもできる．例えば，写像 $k':M(n,\boldsymbol{C}')\to MJ'(2n,\boldsymbol{R})$ を用いて

$$k'\left(E+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots+\frac{X^m}{m!}\right)=E+k'(X)+\frac{k'(X)^2}{2!}+\cdots+\frac{k'(X)^m}{m!}$$

$$\to\exp k'(X)\in MJ'(2n,\boldsymbol{R})$$

($MJ'(2n,\boldsymbol{R})$ は $M(2n,\boldsymbol{R})$ の閉集合であるから)．k' は同相写像であるから，$E+X+\dfrac{X^2}{2!}+\cdots+\dfrac{X^m}{m!}+\cdots$ は $k'^{-1}(\exp k'(X))$ に収束する)．

補題4.1　$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}',\boldsymbol{H}',\boldsymbol{C}^C,\boldsymbol{H}^C)$ とする．

(1)　$X,Y\in M(n,K)$ が $XY=YX$ をみたすならば

$$\exp(X+Y)=\exp X\exp Y$$

がなりたつ．

(2)　$\exp X\in GL(n,K)$ かつ $(\exp X)^{-1}=\exp(-X)$ である．

証明　(1)　$\exp X\exp Y$

$$=\left(E+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\cdots\right)\left(E+Y+\frac{Y^2}{2!}+\frac{Y^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=E+(X+Y)+\frac{1}{2!}(X^2+2XY+Y^2)$$

$$+\frac{1}{3!}(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)+\cdots$$

$$=E+(X+Y)+\frac{1}{2!}(X+Y)^2+\frac{1}{3!}(X+Y)^3+\cdots$$

$$=\exp(X+Y)$$

(無限級数の和の順序を変えたり，括弧を繰り替えたりしているので，これが気にかかるならば［9］命題90を見ていただきたい)．

(2)　$\exp X\exp(-X)=\exp(X+(-X))$ ((1)の結果) $=\exp 0=E$ より，$\exp X\in GL(n,K)$ で，かつ，$(\exp X)^{-1}=\exp(-X)$ である．

補題4.2　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．写像 exp：$M(n, K)\to GL(n, K)$ は連続である．

証明　まず，$X, Y\in M(n, K)$ が $|X|, |Y|\leqq a$ ならば，自然数 k に対して

$$|X^k-Y^k|\leqq k(2a)^{k-1}|X-Y|$$

がなりたつことを示そう．実際，$k=1$ のときは明らかになりたつから，k に関する帰納法で証明する．それは

$$\begin{aligned}|X^{k+1}-Y^{k+1}|&=|X(X^k-Y^k)+(X-Y)Y^k|\\&\leqq 2|X||X^k-Y^k|+2|X-Y||Y^k|\\&\leqq 2ak(2a)^{k-1}|X-Y|+2|X-Y|2^{k-1}a^k\\&=(k+1)(2a)^k|X-Y|\end{aligned}$$

となるからである．さて，$\lim_{m\to\infty}X_m=X$ ならば $\lim_{n\to\infty}\exp X_m=\exp X$ を示そう．$X_1, X_2, \cdots, X_m\cdots$ は X に収束するから，$|X|, |X_m|\leqq a\ (m=1, 2\cdots)$ をみたす正数 a が存在する．

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{N}\frac{X_m^k}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{X^k}{k!}\right|&=\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}(X_m^k-X^k)\right|\\&\leqq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}|X_m^k-X^k|\leqq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}k(2a)^{k-1}|X_m-X|\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{(2a)^{k-1}}{(k-1)!}|X_m-X|\leqq e^{2a}|X_m-X|\end{aligned}$$

において $N\to\infty$ とすると $|\exp X_m-\exp X|\leqq e^{2a}|X_m-X|$ を得る．さらに，$m\to\infty$ とすると $|\exp X_m-\exp X|\to 0$ となるので，$\lim_{m\to\infty}\exp X_m=\exp X$ を得る．これは，写像 exp が連続であることを示している．

次の補題4.3にはいる前に，行列 X の跡 $\mathrm{tr}(X)$ を定義しておく．

定義　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．$X=\left(x_{ij}\right)\in M(n, K)$ に対し，$\mathrm{tr}(X)\in K$ を

$$\mathrm{tr}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$$

で定義する．$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^C)$ のときには

$$\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)\qquad X, Y\in M(n, K)$$

がなりたっている．

補題4.3　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．$X\in M(n, K)$ に対し次がなりたつ．

(1)　$\exp(P^{-1}XP)=P^{-1}(\exp X)P\quad P\in GL(n, K)$

(2)　$(\exp X)^* = \exp X^*$

(3)　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^C)$ のとき，　${}^t(\exp X) = \exp {}^tX$，$\overline{\exp X} = \exp \overline{X}$

(4)　$K = \boldsymbol{C}$ のとき，X の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするならば，$\exp X$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ である．

(5)　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}^C)$ のとき，　$\det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$

(6)　$\dfrac{d}{dt}(\exp tX) = X \exp tX \qquad (t \in \boldsymbol{R})$

証明　(1)　$(P^{-1}XP)^m = P^{-1}X^mP$ より明らかである．

(2)　$(X^m)^* = (X^*)^m$，$\overline{X^m} = \overline{X}^m$ となるからである．

(3)　K が可換ならば，${}^t(X^m) = ({}^tX)^m$ となるからである．

(4)　$X \in M(n, \boldsymbol{C})$ は，ある $P \in GL(n, \boldsymbol{C})$ により $P^{-1}XP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ に変形される（線型代数学で既知とする）ので

$$P^{-1}(\exp X)P = \exp(P^{-1}XP) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

となる．$\exp X$ の固有値は $P^{-1}(\exp X)P$ の固有値と一致し，それは $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ である．

(5)　$K = \boldsymbol{C}$ ならば，(4)と同じ記号を用いて

$$\begin{aligned} \det(\exp X) &= \det(P^{-1}(\exp X)P) = \det(\exp(P^{-1}XP)) \\ &= e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\mathrm{tr}(P^{-1}XP)} = e^{\mathrm{tr}(X)} \end{aligned}$$

を得る．$K = \boldsymbol{R}$ のときには，$X \in M(n, \boldsymbol{R})$ を $X \in M(n, \boldsymbol{C})$ とみなして上記の結果を用いればよい．$K = \boldsymbol{C}'$ のとき，$X = P + Qi'$，$P, Q \in M(n, \boldsymbol{R})$ を

$$X = \iota A + \overline{\iota} B \qquad A = P + Q,\ B = P - Q, \quad \iota = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{i}')$$

と表わすとき

$$\exp X = \iota \exp A + \overline{\iota} \exp B$$

となるので，

$$\begin{aligned} \det(\exp X) &= \iota \det(\exp A) + \overline{\iota} \det(\exp B) \quad \text{（補題3.4）} \\ &= \iota e^{\mathrm{tr}(A)} + \overline{\iota} e^{\mathrm{tr}(B)} \\ &= e^{\iota \mathrm{tr}(A) + \overline{\iota} \mathrm{tr}(B)} = e^{\mathrm{tr}(\iota A + \overline{\iota} B)} = e^{\mathrm{tr}(X)} \end{aligned}$$

を得る．$K = \boldsymbol{C}^C$ のときも $X = \iota A + \overline{\iota} B$，$A, B \in M(n, C)$，$\iota = \dfrac{1}{2}(1 + \boldsymbol{i}i)$ とおいて，同様にして得られる．

(6)
$$\exp tX = E + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \cdots$$

であるから，これを項別に t で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp tX &= X + tX^2 + \frac{t^2X^3}{2!} + \cdots \\ &= X\left(E + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= X\exp tX\end{aligned}$$

を得る．(項別微分が許されるが，気になるならば微分の定義に従って直接証明することもできる)．

定義　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．G を $GL(n, K)$ の線型 Lie 部分群とするとき

$$\mathfrak{g} = \{X \in M(n, K) \mid \exp tX \in G \ \ (\text{すべての } t \in \boldsymbol{R})\}$$

を**線型 Lie 群 G の Lie 環**という

線型 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，積

$$[X, Y] = XY - YX$$

により $\boldsymbol{R}$-Lie 環になることを示そう．(たとえこれを知らなくても，次の定理4.8の例では，それらが $\boldsymbol{R}$-Lie 環になっていることは，個々に容易に確かめられることではあるが)．

補題4.4　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^C, \boldsymbol{H}^C)$ とする．$X \in M(n, K)$ に対し次の(1)，(2)がなりたつ．

(1)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(E + \frac{X}{m}\right)^m = \exp X$

(2)　$Y_m \in M(n, K)$ が $O(1/m^{\frac{3}{2}})$ $(\displaystyle\lim_{m\to\infty} m^{\frac{3}{2}}|Y_m| \leqq a$ となる定数 a が存在すること$)$ ならば

$$\lim_{m\to\infty}\left(E + \frac{X}{m} + Y_m\right)^m = \exp X$$

となる．

証明　(1)　$\exp X = E + X + \dfrac{1}{2!}X^2 + \dfrac{1}{3!}X^3 + \cdots,$

$$\left(E + \frac{X}{m}\right)^m = E + X + \frac{m(m-1)}{2!\,m^2}X^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!\,m^3}X^3 + \cdots + \frac{X^m}{m^m}$$

であるから

$$\exp X - \left(E + \frac{X}{m}\right)^m$$

$$=\frac{1}{2!}\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)X^2+\frac{1}{3!}\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right)X^3+\cdots$$

となる．この各 X^k の係数が正数であることに注意すると，$2|X|=x$ とおくとき

$$\left|\exp X-\left(E+\frac{X}{m}\right)^m\right|\leqq e^x-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\to 0\qquad(m\to\infty)$$

となる．よって，$\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{X}{m}\right)^m=\exp X$ である．

(2)　$\left(E+\frac{X}{m}+Y_m\right)^m-\left(E+\frac{X}{m}\right)^m$ を展開すると，$\frac{X}{m}$，Y_m の正数係数の多項式になるから

$$\left|\left(E+\frac{X}{m}+Y_m\right)^m-\left(E+\frac{X}{m}\right)^m\right|\leqq\left(1+\frac{x}{m}+O(1/m^{\frac{3}{2}})\right)^m-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

（$O(1/m^{\frac{3}{2}})\in\boldsymbol{R}$ は $\lim_{m\to\infty}m^{\frac{3}{2}}O(1/m^{\frac{3}{2}})\leqq b$ となる定数 b が存在することを意味する）

$$\leqq\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1+O(1/m^{\frac{3}{2}})\right)^m-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$
$$\to e^x-e^x=0\qquad(m\to\infty)$$

となる．よって，

$$\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{X}{m}+Y_m\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{X}{m}\right)^m=\exp X$$

である．

命題4.5　$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}',\boldsymbol{H}',\boldsymbol{C}^C,\boldsymbol{H}^C)$ とする．$X,\ Y\in M(n,K)$ に対し次の(1)，(2)がなりたつ．

(1)　$\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)^m=\exp(X+Y)$

(2)　$\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\left(\exp\frac{X}{m}\right)^{-1}\left(\exp\frac{Y}{m}\right)^{-1}\right)^{m^2}=\exp[X,\ Y]$

証明　(1)　$\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)^m$

$$=\left(\left(E+\frac{X}{m}+\frac{X^2}{2m^2}+\cdots\right)\left(E+\frac{Y}{m}+\frac{Y^2}{2m^2}+\cdots\right)\right)^m$$
$$=\left(E+\frac{1}{m}(X+Y)+\frac{1}{2m^2}(X^2+2XY+Y^2)+\cdots\right)^m$$
$$\to\exp(X+Y)\qquad(m\to\infty)\ (\text{補題}4.4)$$

(2) $$\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\left(\exp\frac{X}{m}\right)^{-1}\left(\exp\frac{Y}{m}\right)^{-1}\right)^{m^2}$$

$$=\left(\left(E+\frac{X}{m}+\frac{X^2}{2m^2}+\frac{X^3}{6m^3}+\cdots\right)\left(E+\frac{Y}{m}+\frac{Y^2}{2m^2}+\frac{Y^3}{6m^3}+\cdots\right)\left(E-\frac{X}{m}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{X^2}{2m^2}-\frac{X^3}{6m^3}+\cdots\right)\left(E-\frac{Y}{m}+\frac{Y^2}{2m^2}-\frac{Y^3}{6m^3}+\cdots\right)\right)^{m^2}$$

$$=\left(E+\frac{XY-YX}{m^2}+\frac{1}{2m^3}(X^2Y-XY^2+YX^2-Y^2X+YXY\right.$$

$$\left.-XYX)+\cdots\right)^{m^2}$$

$$\to\exp(XY-YX)=\exp[X,\ Y]$$　（補題4.4）

定理4.6　線型 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環である．

証明　G が $GL(n,K)$ の線型 Lie 部分群であるとする．

(1)　$X\in\mathfrak{g}$　ならば　$\lambda X\in\mathfrak{g}$，$\lambda\in\boldsymbol{R}$

実際，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対し，$\exp t(\lambda X)=\exp(\lambda t)X\in G$ となるからである．

(2)　$X,\ Y\in\mathfrak{g}$　ならば　$X+Y\in\mathfrak{g}$

実際，$X,\ Y\in\mathfrak{g}$ であるから，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対し $\exp\dfrac{tX}{m}$，$\exp\dfrac{tY}{m}\in G$ となり，さらに $\left(\exp\dfrac{tX}{m}\exp\dfrac{tY}{m}\right)^m\in G$ となる．G は $GL(n,K)$ の閉集合であるから，$\lim\limits_{m\to\infty}\left(\exp\dfrac{tX}{m}\exp\dfrac{tY}{m}\right)^m\in G$ となるが，命題4.5より $\exp t(X+Y)\in G$ となる．よって $X+Y\in\mathfrak{g}$ である．

(3)　$X,\ Y\in\mathfrak{g}$　ならば　$[X,\ Y]\in\mathfrak{g}$

実際，(2)と同様にして，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対し $\exp t[X,\ Y]=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\exp\dfrac{tX}{m}\exp\dfrac{Y}{m}\left(\exp\dfrac{tX}{m}\right)^{-1}\left(\exp\dfrac{Y}{m}\right)^{-1}\right)^{m^2}\in G$ となる．よって $[X,\ Y]\in\mathfrak{g}$ である．

Lie 群 G の Lie 環は，G に対応する独逸小文字 $\mathfrak{g}$ で表わすのが普通である．例えば，Lie 群 $SU(n)$ の Lie 環は $\mathfrak{su}(n)$ で表わされる．

定理4.7　一般線型 Lie 群 $GL(n,\boldsymbol{R})$，$GL(n,\boldsymbol{C})$，$GL(n,\boldsymbol{H})$ の Lie 環はそれぞれ

$$\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})=M(n,\boldsymbol{R}),\quad \mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})=M(n,\boldsymbol{C}),$$
$$\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{H})=M(n,\boldsymbol{H})$$

である．

証明　$X\in M(n,K)$ ならば，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対し $\exp tX\in GL(n,K)$ と

なる（補題4.1）からである．

ここで，２章で定義した線型 Lie 群 の Lie 環を決定しておこう．

定理4.8　$SL(n, \boldsymbol{C})$, $SU(n)$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $SU(m, n-m)$, $SU^*(2n)$, $O(n, \boldsymbol{C})$, $SO(n, \boldsymbol{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(m, n-m)$, $SO(m, n-m)$, $SO^*(2n)$, $Sp(n, \boldsymbol{C})$, $Sp(n)$, $Sp(n, \boldsymbol{R})$, $Sp(m, n-m)$, $U(n)$ の Lie 環はそれぞれ次のようである．

$$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})=\{X\in M(n, \boldsymbol{C})|\mathrm{tr}(X)=0\}$$
$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in M(n, \boldsymbol{C})|X^*+X=0,\ \mathrm{tr}(X)=0\}$$
$$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})=\{X\in M(n, \boldsymbol{R})|\mathrm{tr}(X)=0\}$$
$$\mathfrak{su}(m, n-m)=\{X\in M(n, \boldsymbol{C})|X^*I_m+I_mX=0,\ \mathrm{tr}(X)=0\}$$
$$\mathfrak{su}^*(2n)=\{X\in M(2n, \boldsymbol{C})|JX=\overline{X}J,\ \mathrm{tr}(X)=0\}$$
$$\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})=\mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C})=\{X\in M(n, \boldsymbol{C})|{}^tX+X=0\}$$
$$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)=\{X\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tX+X=0\}$$
$$\mathfrak{o}(m, n-m)=\mathfrak{so}(m, n-m)=\{X\in M(n, \boldsymbol{R})|{}^tXI_m+I_mX=0\}$$
$$\mathfrak{so}^*(2n)=\{X\in M(2n, \boldsymbol{C})|JX=\overline{X}J,\ {}^tX+X=0\}$$
$$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})=\{X\in M(2n, \boldsymbol{C})|{}^tXJ+JX=0\}$$
$$\mathfrak{sp}(n)=\{X\in M(n, \boldsymbol{H})|X^*+X=0\}$$
$$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})=\{X\in M(2n, \boldsymbol{R})|{}^tXJ+JX=0\}$$
$$\mathfrak{sp}(m, n-m)=\{X\in M(n, \boldsymbol{H})|X^*I_m+I_mX=0\}$$
$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in M(n, \boldsymbol{C})|X^*+X=0\}$$

証明　例として $SL(n, \boldsymbol{C})$, $SU(n)$ の Lie 環を求めよう．$X\in\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ とする．定義より，すべて $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\exp tX\in SL(n, \boldsymbol{C})$ となる．$\det(\exp tX)=1$ より $e^{t\,\mathrm{tr}(X)}=1$ (補題4.3) である．これを t で微分して $\mathrm{tr}(X)e^{t\,\mathrm{tr}(X)}=0$ となるが，$t=0$ として $\mathrm{tr}(X)=0$ を得る．逆に，$X\in M(n, \boldsymbol{C})$ が $\mathrm{tr}(X)=0$ ならば，$\det(\exp tX)=e^{t\,\mathrm{tr}(X)}=e^0=1$ より $\exp tX\in SL(n, \boldsymbol{C})$ となる．以上で，$SL(n, \boldsymbol{C})$ の Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ が求められた．つぎに $SU(n)$ の Lie 環 を求めよう．$X\in\mathfrak{su}(n)$ とする．定義より，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\exp tX\in SU(n)$，すなわち

$$\det(\exp tX)=1,\ (\exp tX)^*(\exp tX)=E$$

となる．前者の条件は，上述より $\mathrm{tr}(X)=0$ である．後者より $\exp tX^*=\exp(-tX)$（補題4.3）となるから，これを t で微分して $X^*\exp tX^*=-X\exp(-tX)$(補題4.3)となるが，$t=0$ として $X^*=-X$ を得る．逆に，$X^*=-X$ ならば，$\exp tX^*=\exp(-tX)$ より $(\exp tX)^*(\exp tX)=E$ となる．以上で，

$SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(n)$ が決定された．他も同様にして求められる．

2 章の後半に与えた線型 Lie 群 $SU(n, \boldsymbol{C}')$, $Sp(n, \boldsymbol{H}')$, … の Lie 環 $\mathfrak{su}(n, \boldsymbol{C}')$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{H}')$, … も同様に求められる．しかし（これらの群は $SL(n, \boldsymbol{R})$, $Sp(n, \boldsymbol{R})$, … を調べるための補助の群であるという意味もあるので）省略した．

さきに，Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，G の局所的構造を決定するものであると書いたが，この一端が次の定理からも読みとれる．

定理*4.9　G を線型 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とするとき，$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は局所 C^∞-可微分同相写像である．すなわち，$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍 V と G の単位元 E の近傍 U が存在して

$$\exp : V \to U$$

が C^∞-可微分同相写像になる．

証明は省略する（[6] 定理4.20）．実は，Cartan の定理2.6「$GL(n, K)$ の閉部分群 G は Lie 群である」を証明するには，まずこの定理を示してから G が多様体になることを証明するのである（[1] 補題2.30）．

定理4.10　G を線型 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とするとき，G の単位元 E の近傍 U が存在し，U の任意の元 A は

$$A = \exp X \qquad X \in \mathfrak{g}$$

と表わされる．

証明　定理4.9を認めると明らかである．

定理4.9はまた次のことを教えている．Lie 群 G は多様体であるから，多様体としての次元 $\dim G$ が定義されている．一方，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間であるから，$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間としての次元 $\dim \mathfrak{g}$ が定義されている．そして

$$\dim G = \dim U = \dim V = \dim \mathfrak{g}$$

となっているのである．この事実は，Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は G の単位元 1 における接ベクトル空間と $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間として同一視できる（[2] 参照）ことを知るならば，$\dim G = \dim \mathfrak{g}$ は自明であるかもしれない．Lie 群 G の次元の定義はその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の次元のことであると理解しておいても差しつかえないかもしれない．これを定理として次に書いておこう．

定理4.11　G を線型 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とするとき

$$\dim G = \dim \mathfrak{g}$$

がなりたつ．

定理4.12　次の線型 Lie 群の次元は右の通りである．

$SL(n, \boldsymbol{C})$	$2(n^2-1)$
$SU(n)$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $SU(m, n-m)$	n^2-1
$SU^*(2n)$	$4n^2-1$
$O(n, \boldsymbol{C})$, $SO(n, \boldsymbol{C})$	$n(n-1)$
$O(n)$, $SO(n)$, $O(m, n-m)$, $SO(m, n-m)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$SO^*(2n)$	$n(2n-1)$
$Sp(n, \boldsymbol{C})$	$2n(2n+1)$
$Sp(n)$, $Sp(n, \boldsymbol{R})$, $Sp(m, n-m)$	$n(2n+1)$
$U(n)$	n^2

証明　いずれもその Lie 環の次元を求めればよい（定理4.11）が，例として $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$ の次元を求めておこう．それはいずれも容易であるが，後の必要のため，$\boldsymbol{R}$-基底を具体的に明示して求めよう．次の行列を用意する．

$$E_{ij}=\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} i$$

((i, j)-元のみ 1 で他の成分はすべて 0 の行列)．$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$ において

$$H_i=E_{ii}-E_{nn} \qquad i=1, \cdots, n-1$$

とおくとき

$$\{H_i, \quad i=1, \cdots, n-1, E_{ij}, \quad i, j=1, \cdots, n, \quad i \neq j\}$$

は $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$ の $\boldsymbol{R}$-基底になる．よって，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$ の次元は

$$(n-1)+(n^2-n)=n^2-1$$

である．つぎに，$\mathfrak{o}(n)$ において

$$G_{ij}=E_{ij}-E_{ji} \qquad i, j=1, \cdots, n$$

とおくとき，

$$\{G_{ij}, \quad 1 \leqq i<j \leqq n\}$$

は $\mathfrak{o}(n)$ の $\boldsymbol{R}$-基底になる．よって，$\mathfrak{o}(n)$ の次元は

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

である．$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$ のとき，$X=\begin{pmatrix} X_{11}\cdots X_{1n} \\ \cdots \\ X_{n1}\cdots X_{nn} \end{pmatrix} \in M(2n, \boldsymbol{R})$ $(X_{ij} \in M(2, \boldsymbol{R}))$ が X

$\in \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$ であるための条件は

$$ {}^tX_{ji} = JX_{ij}J \qquad i, j = 1, \cdots, n $$

であるから，

$$ H_i = E_{2i-1 2i-1} - E_{2i 2i} \qquad i = 1, \cdots, n $$

$$ U_{ij} = E_{2i-1 2j-1} - E_{2j 2i}, \qquad \hat{U}_{ij} = E_{2i 2j} - E_{2j-1 2i-1} \qquad i < j $$

$$ V_{ij} = E_{2i-1 2j} + E_{2j-1 2i}, \qquad \hat{V}_{ij} = E_{2i 2j-1} + E_{2j 2i-1} \qquad i < j $$

$$ W_i = E_{2i-1 2i}, \qquad \hat{W}_i = E_{2i 2i-1} \qquad i = 1, \cdots, n $$

は $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$ の $\boldsymbol{R}$-基底になる．よって，$\mathfrak{sp}(n, R)$ の次元は

$$ n + 4(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + 2n = n(2n+1) $$

である．念のため，もう 1 つ $\mathfrak{u}(n)$ の次元を求めておこう．

$$ \{ \boldsymbol{i}E_{ii},\ i = 1, \cdots, n,\ E_{ij} - E_{ji},\ i(E_{ij} + E_{ji}),\ 1 \leqq i < j \leqq n \} $$

は $\mathfrak{u}(n)$ の $\boldsymbol{R}$-基底になるから，$\mathfrak{u}(n)$ の次元は

$$ n + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = n^2 $$

である．他の場合も同様にして求められるが，後で述べる Lie 環の複素化の定理11.1，11.2，11.3から，次元の計算は上記の 3 つの場合 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{o}(n)$，$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$ で求めておけば十分であるということになっている．

定理4.8にある Lie 環のうち，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}$-Lie 環になっている．これについて注意しておこう．

定義*　線型 Lie 群 $G \subset GL(n, \boldsymbol{C})$ が複素 Lie 群 のとき，

$$ \mathfrak{g} = \{ X \in M(n, \boldsymbol{C}) | \exp zX \in G \ (\text{すべての } z \in \boldsymbol{C}) \} $$

を**複素 Lie 群 G の複素 Lie 環**という．$\mathfrak{g}$ は $[X, Y] = XY - YX$ により $\boldsymbol{C}$-Lie 環になる．

定理*4.13　複素 Lie 群 $GL(n, \boldsymbol{C})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$, $O(n, \boldsymbol{C})$, $SO(n, \boldsymbol{C})$, $Sp(n, \boldsymbol{C})$ の複素 Lie 環はそれぞれ $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C}) = \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ である．

（リレー夜話）

同じ寮に同級の前田周一郎（現愛媛大学教授）がおり，３年のゼミに角谷研に行って Lie 群を学びたいというので私もそれに同調することになりました．角谷静夫先生はこの年アメリカに行かれましたので，安西先生について Pontrjagin の書の Lie 群の章を読むことになりました．ゼミの冒頭「微分方程式の解の存在と一意性」を用いる所があり，私が「証明を知りません」といいました所「そんな事を知らなくてどうする」と叱られまして次回までに調べて来るように命ぜられました．そこで南雲研へ行って霜田先生に教わったり，自分でも出来るだけ調べて，次回のゼミで「証明します」といいますと「もういい」といわれてしまいました．忘れられない思い出です．さて，そのゼミですが，前田君は当時，病気がちで，寮で寝込むことが多くなり「今日はゼミを休む」というので「それなら僕も休む」ということに度々なりました．１年を通じてゼミをした回数は多くなかったと思いますが，よくそれで許してもらえたものです．３年次に安西先生の Weyl の「古典群」の講義がありました．始め大学院生数名と前田君と私が聴講していましたが，１人去り２人去り，前田君と私２人だけになりました．前田君は病気で休み出して，とうとう私１人になってしまいました．私には講義の内容が分からなくなっていましたが，休むわけにはいかず１人で聞いていました．私１人のために講義を続けて下さったことに申し訳ない気持で一杯でした．大学での単位の殆んどは安西先生から頂きました．ともあれ，私が Lie 群に興味を持つことになったのは大学３年次のゼミと講義が関係していると思われます．

（**大阪市立大学時代**16年）　幸運にも大学の助手になれたことは私の人生の最大の分かれ目であったと感謝しなければなりません．私も数学のプロになったのだからというわけで，助手になってからの４，５年の間は最も勉強をした時代でした．しかし，勉強したからといって論文が書けるわけではないので，一番苦しんだ時代であったといえます．苦んだといえば生活苦もありました．私の初任給は5000円でした．下宿（一応食事付）に4000円支払い交通定期代が500円等でどうしてもやって行けず困っていた所，高等工業学校の夜学の Arbeit で2000円はいりやっと息をつきました．背広一着分が給料２ケ月分という時代ですから生きて行くだけで大変な時代でした．

さて，数学ですが，一番よく読んだのが，安西先生に講義していただいた Weyl の「古典群」です．これはとても難解で非常に味のあるすばらしい

(p. 80 へつづく)

5. 連結な compact Lie 群

与えられた Lie 群 G が compact であるかどうか，また連結であるかどうかを判定することは重要なことである．これらの位相的な性質が Lie 群 G を調べやすくし，またある意味で Lie 群 G を規制するからである．この章と次章で，2 章で与えた線型 Lie 群の compact 性と連結性について調べることにする．

定義　Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$（したがって $M(n, \boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{n^2}$, $M(n, \boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}^{2n^2}$, $M(n, \boldsymbol{H})=\boldsymbol{R}^{4n^2}$ でもよい）の有界閉集合 M を **compact 集合**という．（ここに，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 M が**有界**であるとは，ある正数 $r>0$ が存在し，$x\in M$ ならば $|x|\leqq r$ となることである）．

実は，compact の定義は別にあって，上記の定義は定理であるかもしれない．しかし，本書の Lie 群の具体例を取り扱うときにはこれを定義としておいて十分である．それでも，後で定理を述べるときには一般の compact の定義も必要となるので，その定義を書いておく．

定義　M を位相空間とする．M の開集合からなる集合族 $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ が $M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となるとき，$\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ を M の**開被覆**という．Λ の元の個数が有限であるとき $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ を M **有限開被覆**という．さて，M の任意の開被覆の中から有限開被覆を選ぶことができるとき，すなわち

$$M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \qquad O_\lambda \text{ は } M \text{ の開集合}$$

ならば，有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_m\in\Lambda$ が存在して

$$M=\bigcup_{i=1}^{m} O_{\lambda_i}$$

となるとき，M は **compact** であるという．

compact について，次の性質は重要なものであり，後で用いられる．

補題5.1　M，N を位相空間とする．

(1)　$f: M\to N$ を全射な連続写像とするとき，

$$M が \text{compact} \quad ならば \quad N も \text{compact}$$

がなりたつ．

(2)　$f: M \to N$ が全単射な連続写像であり，M が compact，N が Hausdorff ならば，f は同相写像になる．

(3)
$$M \times N が \text{compact} \quad \rightleftarrows \quad M,\ N が \text{compact}$$

がなりたつ．

定理5.2　$U(n)$，$SU(n)$，$O(n)$，$SO(n)$，$Sp(n)$ は compact（線型 Lie 群）である．

証明　例として $U(n)$，$SU(n)$ について証明しよう．$U(n)$ は $M(n, \boldsymbol{C})$ の閉集合である（定理2.5参照）．実際，$A_m \in U(n)$ が $\lim_{m\to\infty} A_m = A \in M(n, \boldsymbol{C})$ ならば，

$$A^*A = \lim_{m\to\infty} A_m{}^* \lim_{m\to\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} A_m{}^* A_m = \lim_{m\to\infty} E = E$$

より $A \in U(n)$ となるからである．$U(n)$ は $M(n, \boldsymbol{C})$ の有界集合である．実際，$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \in U(n)$，$\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{C}^n$ と表わすとき，$A^*A = E$ の条件から，$|\boldsymbol{a}_i| = 1$，$i = 1, \cdots, n$ が得られる．よって

$$|A| = \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_n|^2} = \sqrt{n}$$

となり，$U(n)$ は有界である．以上で，$U(n)$ が compact であることが示された．つぎに，$SU(n)$ は $M(n, \boldsymbol{C})$ の閉集合である（定理2.5参照）．実際，$A_m \in SU(n)$ が $\lim_{m\to\infty} A_m = A \in M(n, \boldsymbol{C})$ ならば，上述より $A \in U(n)$ であるが，さらに

$$\det A = \det \lim_{m\to\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} \det A_m = \lim_{m\to\infty} 1 = 1$$

となるからである．$SU(n)$ は $U(n)$ の部分集合として当然有界である．以上で，$SU(n)$ が compact であることが示された．$O(n)$，$SO(n)$，$Sp(n)$ についても，$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{H}$ に置きかえて同様に証明される．

つぎに連結性について述べよう．

定義　M を位相空間とする．

(1)　M が互いに共通部分のない２つの（空集合でない）開集合の和にならないとき，M は**連結**であるという．すなわち，M が連結であるとは

$$M = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \phi, \quad O_1 \neq \phi, \quad O_2 \neq \phi$$

をみたす M の開集合 O_1，O_2 が存在しないことである．M が連結でないとき，M を互いに共通部分のない（２個以上の）連結な部分空間 M_λ の和に分

けることができる：

$$M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda \qquad M_\lambda \text{ は連結}$$

この各 M_λ を M の**連結成分**という．

(2)　M の任意の2点 x，y に対し，x と y を結ぶ道が存在するとき，M は**弧状連結**であるという．（u が x と y を結ぶ**道**であるとは，u が連続写像 u：$I=\{t\in\boldsymbol{R}\mid 0\leqq t\leqq 1\}\to M$ であって $u(0)=x$，$u(1)=y$ をみたすことである）．

連結（弧状連結）について，次の性質は重要なものであり，後で用いられる．

補題5.3　M，N を位相空間とする．

(1)　f：$M\to N$ を全射な連続写像とするとき，

M が連結（弧状連結）　ならば　N も連結（弧状連結）

がなりたつ．

(2)　　$M\times N$ が連結（弧状連結）　$\rightleftarrows$　M，N 連結（弧状連結）

がなりたつ．

(3)　M の各連結成分 M_λ は M の閉集合である．

以上のように，連結と弧状連結の定義を与えたが，両者は一致しない．

弧状連結　ならば　連結

は常になりたつ（これは区間 I が連結であるという事実による）が，逆はなりたたない．しかし，多様体 M では両者の定義が一致している．それは，多様体 M（局所的に Euclid 空間に同相であるので）の各点 x が弧状連結な近傍をもつという事実による．実際，一点 $x_0\in M$ をとり，x_0 と道で結べる M の点全体の集合を O_1，x_0 と道で結べない M の点全体の集合を O_2 とすると，O_1，O_2 は M の開集合であり，$M=O_1\cup O_2$，$O_1\cap O_2=\phi$，$x_0\in O_1\neq\phi$ となる．よって，M が連結であるとすると，$M=O_1$ となり，M の弧状連結であることが導かれる．特に，多様体である Lie 群では，2つの連結の定義は一致しているので，以後，連結で両様の意味をもつものとする．

Lie 群 G が弧状連結であることを示すには，G の任意の元が G の単位元 1 と道で結べることを示せばよい．道で結ぶといっても同じことならよい性質をもつ道（ある意味において最短の道：測地線）で結ぶ方がよいが，次の定理では，実はそうなっている．

定理5.4　$U(n)$，$SU(n)$，$SO(n)$，$Sp(n)$ は連結（線型 Lie 群）である．

証明　(1)　$U(n)$ のとき，$A\in U(n)$ はある $P\in U(n)$ により

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \qquad \theta_i \in \boldsymbol{R}$$

に変形される（これは線型代数学でよく知られた事実である（[9] 命題25））．さて，写像 $u : I \to U(n)$ を

$$u(t)=P\begin{pmatrix} e^{i\theta_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n t} \end{pmatrix}P^{-1}$$

で定義すると，u は連続であって，$u(0)=E$，$u(1)=A$ をみたしている．よって，$U(n)$ は弧状連結である．

(2)　$SU(n)$ のときには，(1)において $\theta_1+\cdots+\theta_n=0$ の条件を付け加えると，同様にして証明することができる．

(3)　$Sp(n)$ のとき，$A\in Sp(n)$ はある $P\in Sp(n)$ により

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \qquad \theta_i \in \boldsymbol{R}$$

に変形される* ことを既知とすれば（[9] 命題25），(1)と同様にして証明することができる．

(4)　$SO(n)$ のとき，$A\in SO(n)$ はある $P\in SO(n)$ により

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_m) & \\ & & & (1) \end{pmatrix}, \quad R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

に変形される* ことを既知とする（[9] 命題25）．ここに，記号(1)は，n が偶数のときには空であり，n が奇数のときには 1 を表わすものとする．さて，写像 $u : I \to SO(n)$ を

$$u(t)=P\begin{pmatrix} R(\theta_1 t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_m t) & \\ & & & (1) \end{pmatrix}P^{-1}$$

で定義すると，u は連続であって，$u(0)=E$，$u(1)=A$ をみたしている．よって，$SO(n)$ は弧状連結である．

定理5.5　(1)　$A\in U(n)$ は $A=\exp X$，$X\in\mathfrak{u}(n)$

(2)　$A\in SU(n)$ は $A=\exp X$，$X\in\mathfrak{su}(n)$

(3)　$A\in SO(n)$ は $A=\exp X$，$X\in\mathfrak{so}(n)$

(4)　$A\in Sp(n)$ は $A=\exp X$，$X\in\mathfrak{sp}(n)$

と表わされる．

証明　(1)　定理5.4の証明にあるように，$A \in U(n)$ はある $P \in U(n)$ を用いて

$$A = P\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}P^{-1} = P(\exp\begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n\end{pmatrix})P^{-1} = \exp\,(P\begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n\end{pmatrix}P^{-1})$$

と表わされる．$X = P\begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n\end{pmatrix}P^{-1}$ は $X^* = -X$ となるから $X \in \mathfrak{u}(n)$ である．よって，$A = \exp X$，$X \in \mathfrak{u}(n)$ となる．

(2)，(4)のときも，(1)と同様にして証明することができる．

(3)　$SO(n)$ のときも

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

に注意すれば，(1)と同様にして証明することができる．

定理5.5より一般に，次の定理がなりたつことが知られている．

定理* 5.6　連結な compact Lie 群 G は線型 Lie 群（[2] VI章）あり，G の任意の元 A は，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X を用いて

$$A = \exp X \qquad X \in \mathfrak{g}$$

と表わされる．

定理5.4では，Lie 群 G の連結性を示すのに，線型代数学の定理を用いて，元 $a \in G$ と G の単位元 1 とを実際に道で結んでみせたが，群が少しでも複雑な構造をもつと（例えば例外 Lie 群など），それは非常に困難なことになる．そこで，Lie 群の連結性を示すには，次の命題5.8を用いる方がより実際的であるように思われる．

定義　G を群とし，H をその部分群とする．G を H による剰余類に分解する：

$$G = H \cup aH \cup bH \cup \cdots$$

この剰余類全体の集合 $\{H, aH, bH, \cdots\}$ を G/H で表わす．G が位相群のときには，次のようにして G/H を位相空間にする．写像 $p: G \to G/H$ を

$$p(a) = aH$$

で定義する．（p を**自然な写像**という）．さて，G/H の部分集合 U が G/H の開集合であるとは，$p^{-1}(U)$ が G の開集合であることと定義する．このようにすると G/H は位相空間になる．G/H のこの位相を（写像 p による）**等化位**

相という．また，この位相空間 G/H を（G の H による）**等質空間**という．

補題5.7　G を位相群，H をその部分群とする．このとき，自然な写像 p：$G\to G/H$ は全射連続な開写像である．(p が**開写像**であるとは，G の任意の開集合 O に対し $p(O)$ が G/H の開集合になることである)．

証明　p が全射であることは明らかであり，p が連続であることも等化位相の定義から明らかである．つぎに，O を G の開集合とする．$p^{-1}(p(O))=OH=\bigcup_{h\in H}Oh$ であり，G の開集合 Oh の和集合として G の開集合である．これは，等化位相の定義より，$p(O)$ が G/H の開集合であることを意味している．よって，p は開写像である．

命題5.8　G を位相群，H をその部分群とする．このとき

$$G/H,\ H \text{ が連結}\quad \text{ならば}\quad G \text{ も連結}$$

がなりたつ．

証明　G が連結でないとすると

$$G=O_1\cup O_2,\quad O_1\cap O_2=\phi,\quad O_1\neq\phi,\quad O_2\neq\phi$$

をみたす G の開集合 O_1，O_2 が存在する．自然な写像 p：$G\to G/H$ を施すと

$$G/H=p(O_1)\cup p(O_2),\quad p(O_1)\neq\phi,\quad p(O_2)\neq\phi$$

となる．p は開写像である（補題5.7）から，$p(O_1)$，$p(O_2)$ は G/H の開集合である．仮定より，G/H は連結であるから

$$p(O_1)\cap p(O_2)\neq\phi$$

となる．そこで1点 $p(a)\in p(O_1)\cap p(O_2)$，$a\in G$ をとる．このとき

$$aH=(aH\cap O_1)\cup(aH\cap O_2),\quad (aH\cap O_1)\cap(aH\cap O_2)=\phi$$

は明らかであるが，$p(a)\in p(O_1)$ は $aH\cap O_1\neq\phi$，$p(a)\in p(O_2)$ は $aH\cap O_2\neq\phi$ を意味している．よって，aH は連結でない．しかるに，aH と H は同相であるから，H が連結ならば aH も連結の筈であり，矛盾する．以上で G の連結性が証明された．

命題5.8を実用化するために次の定義と命題5.9を用意する．

定義　G を位相群とし，M を位相空間とする．連続な写像 μ：$G\times M\to M$ が与えられ，$\mu(g,x)=gx$ と書くとき，次の2つの条件

(1)　$g_2(g_1x)=(g_2g_1)x$　　　$g_1, g_2\in G$，$x\in M$

(2)　$1x=x$　　　　　　　1 は G の単位元

がなりたつとき，G は M に**働く**という．さらに，M の任意の2点 x，y に対し，$gx=y$ となる $g\in G$ が存在するとき，G は M に**推移的**に働くという．ま

た，G が M に働くとき，点 $x_0 \in M$ に対し

$$G_{x_0} = \{g \in G | gx_0 = x_0\}$$

は G の部分群になるが，この群を G の x_0 における**等方群**という．

命題5.9　compact な位相群 G が Hausdorff 空間 M に推移的に働いているとする．このとき，1点 $x_0 \in M$ における G の等方群を G_{x_0} とするとき，次の同相

$$G/G_{x_0} \simeq M$$

がなりたつ．

証明　写像 $f: G/G_{x_0} \to M$ を

$$f(gG_{x_0}) = gx_0$$

で定義する．（f は well-defined であり）f が単射であることが容易に分る．G が M に推移的に働くことより，f は全射である．G/G_{x_0} には等化位相をいれているので，f は連続であることが容易に分る．G が compact である仮定より，G/G_{x_0} は compact である（補題5.1）．さらに，M は Hausdorff 空間であるから，f は同相写像である（補題5.1）．以上で，$G/G_{x_0} \simeq M$ が証明された．

定義と約束　(1)　$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\}$ を $\boldsymbol{n}$ **次元単位球面**という．

(2)　$A \in U(n-1)$ を $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n)$ と同一視して $U(n-1)$ を $U(n)$ の部分群とみなすことにする．同様に

$$SU(n-1) \subset SU(n),\quad SO(n-1) \subset SO(n),$$
$$Sp(n-1) \subset Sp(n)$$

とみなす．

定理5.10　次の同相がなりたつ．

$$U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1},\quad SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$$
$$SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1},\quad Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$$

証明　始めの2つを証明しよう．

$$S^{2n-1} = \left\{ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n \,\middle|\, |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 1 \right\}$$

とおく．これが $2n-1$ 次元単位球面と同相であることは明らかであろう．さて，写像 $\mu: U(n) \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$，$\mu(A, \boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ により，$U(n)$ は S^{2n-1} に働

いている．この働き方は推移的である．実際，$\boldsymbol{a}\in S^{2n-1}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を含む $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交 $\boldsymbol{C}$-基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}\}$ をとり，行列 $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a})$ をつくると $A\in U(n)$ であり，$A\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{a}$ となるからである．(ここに，$\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とする)．$U(n)$ の $\boldsymbol{e}_n$ における等方群が $U(n-1)$ であることは容易に分る．$U(n)$ は compact である(定理5.2)から，命題5.9より同相 $U(n)/U(n-1)\simeq S^{2n-1}$ を得る．$SU(n)$ のときも同様で，写像 $\mu: SU(n)\times S^{2n-1}\to S^{2n-1}$，$\mu(A, \boldsymbol{a})=A\boldsymbol{a}$ により，$SU(n)$ は S^{2n-1} に働く．この働き方は推移的である．実際，$\boldsymbol{a}\in S^{2n-1}$ に対し，上記と同じ行列 $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a})\in U(n)$ をつくり，$A'=((\det A)^{-1}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a})$ とおくと $A'\in SU(n)$ であり，$A'\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{a}$ となるからである．$SU(n)$ の $\boldsymbol{e}_n$ における等方群は $SU(n-1)$ であり，$SU(n)$ は compact である (定理5.2) から，命題5.9より $SU(n)/SU(n-1)\simeq S^{2n-1}$ を得る．$SO(n)$，$Sp(n)$ のときも，$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{H}$ に置きかえて同様に証明することができる．

単位球面 S^m ($m\geqq 1$) は連結である ([9] 定理 4) ことと，

$$U(1)\simeq S^1,\quad SO(1)=\{1\},\quad SU(1)=\{1\},\quad Sp(1)\simeq S^3$$

となること，およびこれらが連結であることに注意して，定理5.10に命題5.9を適用すると，帰納的に

$$U(n),\ SU(n),\ SO(n),\ Sp(n) \text{ は連結である}$$

ことが結論される．これは定理5.4の別証明になっている．定理5.10と同様にすると，$O(n)/O(n-1)=S^{n-1}$ もなりたつが，$O(1)=\{1, -1\}$ が連結でないため，同様にというわけにはいかない．

最後に，$O(n)$ と $SO(n)$，$U(n)$ と $SU(n)$ の関係を書いておこう．

定義　G を群とし，N を G の正規部分群，H を G の部分群とする．

$$G=NH,\quad N\cap H=\{1\}$$

がなりたつとき，G は N と H の**半直積**であるといい，$G=N\cdot H$ で表わす(正規部分群の方を左の方に書くことにする)．半直積の条件は，G の元 g が

$$g=nh \qquad n\in N,\ h\in H$$

と一意に表わせることである．したがって，写像 $f: G\to N\times H$を

$$f(g)=f(nh)=(n, h)$$

で定義すると，f は全単射になる．G が位相群であるときには，f が同相写像

であることを要求し，G が Lie 群であるときには(N，H が G の閉部分群であるとしておく)，f が C^∞-可微分同相写像であることを要求するものとする．

$$S^0=O(1)=\{1,-1\},\quad S^1=U(1)=\{a\in \boldsymbol{C}\mid |a|=1\}$$

として，次の定理がなりたつ．

定理5.11　(1)　$O(n)$ は $SO(n)$ と S^0 の半直積に位相群として同型である：$O(n)\cong SO(n)\cdot S^0$．特に，次の同相

$$O(n)\simeq SO(n)\times S^0$$

がなりたつ．したがって，$O(n)$ は連結でなく，その連結成分の個数は 2 であり，$O(n)$ の単位元連結成分は $SO(n)$ である．

(2)　$U(n)$ は $SU(n)$ と S^1 の半直積に位相群として同型である：$U(n)\cong SU(n)\cdot S^1$．特に，次の同相

$$U(n)\simeq SU(n)\times S^1$$

がなりたつ．

証明　(1)　$SO(n)$ は $O(n)$ の正規部分群であり，$S^0=\left\{\begin{pmatrix}\pm 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right\}$

は $O(n)$ 部分群である．写像 $f：O(n)\to SO(n)\times S^0$,

$$f(A)=\left(A\begin{pmatrix}(\det A)^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\det A & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right)$$

は同相写像であり，$A\in O(n)$ は

$$A=\left(A\begin{pmatrix}(\det A)^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\det A & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

と表わされ，かつ $SO(n)\cap S^0=\{E\}$ である．これは $O(n)$ が $SO(n)$ と S^0 の半直積であることを示している．

(2)　$A\in U(n)$ ならば $|\det A|=1$ であることに注意して，

$S^1=\left\{\begin{pmatrix}a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\middle|\, a\in \boldsymbol{C},\ |a|=1\right\}$ とおくと，(1)と同様にして証明することができる．

群 $GL(n, \boldsymbol{R})$，$SL(n, \boldsymbol{R})$，$GL(n, \boldsymbol{C})$，$SL(n, \boldsymbol{C})$ は compact でない（定理6.10）が，定理5.11と似た状態にあるので，ここで書いておく．

$$\boldsymbol{R}^* = GL(1, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} - \{0\}, \quad \boldsymbol{C}^* = GL(1, \boldsymbol{C}) = C - \{0\}$$

として，次の定理がなりたつ．

定理5.12 (1)　$GL(n, \boldsymbol{R})$ は $SL(n, \boldsymbol{R})$ と $\boldsymbol{R}^*$ の半直積に位相群として同型である：$GL(n, \boldsymbol{R}) \cong SL(n, \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{R}^*$．特に，次の同相

$$GL(n, \boldsymbol{R}) \simeq SL(n, \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^*$$

がなりたつ．

(2)　$GL(n, \boldsymbol{C})$ は $SL(n, \boldsymbol{C})$ と $\boldsymbol{C}^*$ の半直積に位相群として同型である：$GL(n, \boldsymbol{C}) \cong SL(n, \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{C}^*$．特に，次の同相

$$GL(n, \boldsymbol{C}) \simeq SL(n, \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{C}^*$$

がなりたつ．

証明は定理5.11と同様である．

6. Lie 群の極分解

Lie 群について次の定理がなりたつ．

定理*6.1 (E. Cartan—K. Iwasawa)　G を連結な Lie 群とすると，G の compact 部分群 K が存在し，G は K とある Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^m$ の直積空間に同相になる：

$$G \simeq K \times \boldsymbol{R}^m$$

K は G の極大 compact 部分群であるが，この K は G に対し本質的に一意に定まる．すなわち，このような compact 部分群 K, K' が 2 つあると，ある $a \in G$ が存在して $K' = aKa^{-1}$ となる．

証明は容易でない (K. Iwasawa, On some type of topological groups, Ann. of Math. **50**(1949))．またこの定理は，G が連結でなくても，G の連結成分の個数が有限ならばなりたっている (G.D. Mostow, Self adjoint group, Ann. of Math. **62**(1980))．

定理6.1の分解 $G \simeq K \times \boldsymbol{R}^m$ を，Lie 群 G の**極分解**または **Cartan 分解**という．この Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^m$ の次元 m は

$$m = \dim G - \dim K$$

で求められる．

Lie 群 G の極分解 $G \simeq K \times \boldsymbol{R}^m$ は，Lie 群の位相を調べるには compact Lie 群に限って考察すれば十分であることを示している．例えば

$$K \text{ が連結} \quad \rightleftarrows \quad G \text{ が連結}$$

がなりたつ．単連結のこと，基本群のことを既知とする (〔9〕4 章参照) ならば

$$K \text{ が単連結} \quad \rightleftarrows \quad G \text{ が単連結}$$

さらに，K の基本群と G の基本群が一致する：$\pi_1(K) = \pi_1(G)$ がなりたつことが分かる．

定理*6.2　一般線型 Lie 群の極分解は

$$GL(n, \boldsymbol{R}) \simeq O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$$

$$GL(n,\boldsymbol{C})\simeq U(n)\times\boldsymbol{R}^{n^2}$$
$$GL(n,\boldsymbol{H})\simeq Sp(n)\times\boldsymbol{R}^{n(2n-1)}$$

で与えられる．したがって，$GL(n,\boldsymbol{R})$ は連結でなく，その連結成分の個数は 2 であり (定理5.11)，$GL(n,\boldsymbol{C})$，$GL(n,\boldsymbol{H})$ は連結である (定理5.4)．また，$GL(n,\boldsymbol{R})$，$GL(n,\boldsymbol{C})$，$GL(n,\boldsymbol{H})$ は compact でない．

証明は省略する（〔9〕定理21）．

実際に与えられた線型 Lie 群 G の極分解を求めるには，次の定理が非常に有力である．

定理*6.3　(1)　G が $GL(n,\boldsymbol{R})$ の代数部分群であり，かつ次の条件

$$A\in G \quad ならば \quad {}^tA\in G$$

をみたすならば，同相

$$G\simeq(G\cap O(n))\times\boldsymbol{R}^m$$

がなりたつ．

(2)　G が $GL(n,\boldsymbol{C})$(または $GL(n,\boldsymbol{H})$) の準代数部分群であり，かつ次の条件

$$A\in G \quad ならば \quad A^*\in G$$

をみたすならば，同相

$$G\simeq(G\cap U(n))\times\boldsymbol{R}^m \qquad (または\ G\simeq(G\cap Sp(n))\times\boldsymbol{R}^m)$$

がなりたつ．

証明は省略する（〔2〕VI章，〔6〕定理2.15)．

以下，2 章で与えた線型 Lie 群の極分解を与えよう．

定理6.4　(1)　$SL(n,\boldsymbol{R})\simeq SO(n)\times\boldsymbol{R}^{(n+2)(n-1)/2}$

(2)　$SL(n,\boldsymbol{C})\simeq SU(n)\times\boldsymbol{R}^{n^2-1}$

証明　(1)　$SL(n,\boldsymbol{R})$ は $GL(n,\boldsymbol{R})$ の代数部分群である（定理2.8)．$A\in SL(n,\boldsymbol{R})$ ならば，$\det{}^tA=\det A=1$ より ${}^tA\in SL(n,\boldsymbol{R})$ である．

$$SL(n,\boldsymbol{R})\cap O(n)=SO(n)$$

は定義そのままである．よって，定理6.3(1)より，極分解 $SL(n,\boldsymbol{R})\simeq SO(n)\times\boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m=\dim SL(n,\boldsymbol{R})-\dim SO(n)=(n^2-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n+2)(n-1)$ である（定理4.12)．

(2)は(1)と同様であるが再記する．$SL(n,\boldsymbol{C})$ は $GL(n,\boldsymbol{C})$ の代数部分群である (定理2.8)．$A\in SL(n,\boldsymbol{C})$ ならば，$\det A^*=\overline{\det A}=1$ より $A^*\in SL(n,$

$\boldsymbol{C})$ である．

$$SL(n, \boldsymbol{C}) \cap U(n) = SU(n)$$

は定義そのままである．よって，定理6.3(2)より極分解 $SL(n, \boldsymbol{C}) \simeq SU(n) \times \boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m = \dim SL(n, \boldsymbol{C}) - \dim SU(n) = 2(n^2-1) - (n^2-1) = n^2 - 1$ である（定理4.12）．

定理6.5　(1)　$O(n, \boldsymbol{C}) \simeq O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}$

(2)　$SO(n, \boldsymbol{C}) \simeq SO(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}$

証明　(1)　$O(n, \boldsymbol{C})$ は $GL(n, \boldsymbol{C})$ の代数部分群である（定理2.8）．$A \in O(n, \boldsymbol{C})$ ならば，${}^tAA = E$ より $A{}^tA = E$ となるが，これに $*$ を施して ${}^tA^*A^* = E$ となるので，$A^* \in O(n, \boldsymbol{C})$ である．

$$O(n, \boldsymbol{C}) \cap U(n) = O(n)$$

は明らかである．よって，定理6.3(2)より極分解 $O(n, \boldsymbol{C}) \simeq O(n) \times \boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m = \dim O(n, \boldsymbol{C}) - \dim O(n) = n(n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ である（定理4.12）．

(2)は(1)と同様であるので省略する．

定理6.6　(1)　$Sp(n, \boldsymbol{R}) \simeq U(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)}$

(2)　$Sp(n, \boldsymbol{C}) \simeq Sp(n) \times \boldsymbol{R}^{n(2n+1)}$

証明　(1)　$Sp(n, \boldsymbol{R})$ は $GL(2n, \boldsymbol{R})$ の代数部分群である（定理2.8）．$A \in Sp(n, \boldsymbol{R})$ ならば，${}^tAJA = J$ より $-J{}^tAJA = E$，よって，$-AJ{}^tAJ = E$（補題2.1）となり，$AJ{}^tA = J$，すなわち ${}^{tt}AJ{}^tA = J$ となる．よって，${}^tA \in Sp(n, \boldsymbol{R})$ である．

$$Sp(n, \boldsymbol{R}) \cap O(2n) \cong U(n)$$

は定理3.8である．よって，定理6.3(1)より極分解 $Sp(n, \boldsymbol{R}) \simeq U(n) \times \boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m = \dim Sp(n, \boldsymbol{R}) - \dim U(n) = n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$ である（定理4.12）．

(2)は(1)と同様であるが再記する．$Sp(n, \boldsymbol{C})$ は $GL(2n, \boldsymbol{C})$ の代数部分群である．$A \in Sp(n, \boldsymbol{C})$ ならば，${}^tAJA = J$ より(1)と同じようにして $AJ{}^tA = J$ となるが，これに $*$ を施して ${}^tA^*JA^* = J$ となるので，$A^* \in Sp(n, \boldsymbol{C})$ である．

$$Sp(n, \boldsymbol{C}) \cap U(2n) \cong Sp(n)$$

は定理3.8である．よって，定理6.3(2)より極分解 $Sp(n, \boldsymbol{C}) \simeq Sp(n) \times \boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m = \dim Sp(n, \boldsymbol{C}) - \dim Sp(n) = 2n(2n+1) - n(2n+1) = n(2n+1)$ である（定理4.12）．

定理6.7　(1)　$SO^*(2n)\simeq U(n)\times \boldsymbol{R}^{n(n-1)}$

(2)　$SU^*(2n)\simeq Sp(n)\times \boldsymbol{R}^{(n-1)(2n+1)}$

証明　(1)　$SO^*(2n)$ は $GL(2n, \boldsymbol{C})$ の準代数部分群である（定理2.8）．$A\in SO^*(2n)$ ならば $A^*\in SO^*(2n)$ は容易である．

$$\begin{aligned}SO^*(2n)\cap U(2n)&=\{A\in M(2n,\boldsymbol{C})\,|\,JA=\bar{A}J,\ {}^tAA=E,\ \det A=1,\ A^*A=E\}\\&=\{A\in M(2n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tAJA=J,\ {}^tAA=E,\ \det A=1\}\\&=Sp(n,\boldsymbol{R})\cap SO(2n)\\&\subset Sp(n,\boldsymbol{R})\cap O(2n)\cong U(n)\quad（定理3.8）\end{aligned}$$

である．包含式 $\subset$ は等号である．実際，$A\in Sp(n,\boldsymbol{R})\cap O(2n)$ ならば，${}^tAA=E$ より $\det A=\pm1$ となるが，$U(n)$ は連結である（定理5.4）から，$\det A$ の符号は一定である．しかるに，$\det E=1$ であるから $\det A=1$ となり，等号を得る．よって，定理6.3(2)より極分解 $SO^*(2n)\simeq U(n)\times\boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m=\dim SO^*(2n)-\dim U(n)=n(2n-1)-n^2=n(n-1)$ である（定理4.12）．

(2)は(1)と同様であるが再記する．$SU^*(2n)$ は $GL(2n,\boldsymbol{C})$ の準代数部分群である（定理2.8）．$A\in SU^*(2n)$ ならば $A^*\in SU^*(2n)$ は容易である．

$$\begin{aligned}SU^*(2n)\cap U(2n)&=\{A\in M(2n,\boldsymbol{C})\,|\,JA=\bar{A}J,\ \det A=1,\ A^*A=E\}\\&=\{A\in M(2n,\boldsymbol{C})\,|\,{}^tAJA=J,\ A^*A=E,\ \det A=1\}\\&=Sp(n,\boldsymbol{C})\cap SU(2n)\\&\subset Sp(n,\boldsymbol{C})\cap U(2n)\cong Sp(n)\quad（定理3.8）\end{aligned}$$

である．包含式 $\subset$ は等号である．実際，$A\in Sp(n,\boldsymbol{C})\cap U(2n)$ ならば，${}^tAJA=J$ より $\det A=\pm1$ となるが，$Sp(n)$ は連結である（定理5.4）から，$\det A$ の符号は一定である．しかるに，$\det E=1$ であるから $\det A=1$ となり，等号を得る．よって，定理6.3(2)より極分解 $SU^*(2n)\simeq Sp(n)\times\boldsymbol{R}^m$ を得る．なお，$m=\dim SU^*(2n)-\dim Sp(n)=(4n^2-1)-n(2n+1)=(n-1)(2n+1)$ である（定理4.12）．

次の定理6.9にはいる前に，群の直積の定義と，少しの準備をしておこう．

定義　G_1, G_2 を群とする．直積集合 $G_1\times G_2$ において，積を

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2)=(a_1b_1, a_2b_2)$$

で定義すると，$G_1\times G_2$ は群になる．この群 $G_1\times G_2$ を G_1, G_2 の**直積**という．G_1, G_2 が位相群のときには $G_1\times G_2$ は位相群になり，G_1, G_2 が Lie 群のときには $G_1\times G_2$ は Lie 群になる．

補題6.8　(1)　$S(O(m)\times O(n-m))$

$$=\left\{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid B\in O(m),\ C\in O(n-m), \det B \det C=1\right\}$$

は $SO(m)\times SO(n-m)$ と S^0 の半直積に位相群として同型である：

$$S(O(m)\times O(n-m))\cong(SO(m)\times SO(n-m))\cdot S^0$$

特に，$S(O(m)\times O(n-m))$ は連結でなく，その連結成分の個数は 2 であり，$S(O(m)\times O(n-m))$ の単位元連結成分は $SO(m)\times SO(n-m)$ である．

(2)　$S(U(m)\times U(n-m))$

$$=\left\{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid B\in U(m),\ C\in U(n-m), \det B \det C=1\right\}$$

は $SU(m)\times SU(n-m)$ と S^1 の半直積に位相群として同型である：

$$S(U(m)\times U(n-m))\cong(SU(m)\times SU(n-m))\cdot S^1$$

特に，$S(U(m)\times U(n-m))$ は連結である．

証明　(1)　$S(O(m)\times O(n-m))$ において

$$SO(m)\times SO(n-m)=\left\{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid B\in SO(m),\ C\in SO(n-m)\right\}$$

は正規部分群であり，

$$S^0=\left\{\begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & a \end{pmatrix} \mid a\in \boldsymbol{R},\ \ |a|=1\right\}$$

は部分群である．そして $S(O(m)\times O(n-m))$ は $SO(m)\times SO(n-m)$ と S^0 の半直積である（定理5.11参照）．特に同相

$$S(O(m)\times O(n-m))\simeq SO(m)\times SO(n-m)\times S^0$$

を得るので，補題のような連結性の結果を得る．

(2)　$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{C}$ に置きかえて(1)と同様にして証明することができる．

定理6.9　(1)　$O(m, n-m)\simeq(O(m)\times O(n-m))\times\boldsymbol{R}^{m(n-m)}$

(2)　$SO(m, n-m)\simeq S(O(m)\times O(n-m))\times\boldsymbol{R}^{m(n-m)}$

(3)　$SU(m, n-m)\simeq S(U(m)\times U(n-m))\times\boldsymbol{R}^{2m(n-m)}$

(4)　$Sp(m, n-m)\simeq(Sp(m)\times Sp(n-m))\times\boldsymbol{R}^{4m(n-m)}$

証明　(1)　$O(m, n-m)$ は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の代数部分群である（定理2.8）．$A\in O(m, n-m)$ ならば ${}^tA\in O(m, n-m)$ は容易である．

$$O(m,n-m)\cap O(n)=\{A\in M(n,\boldsymbol{R})\mid {}^tAI_mA=I_m,\ {}^tAA=E\}$$
$$=\{A\in M(n,\boldsymbol{R})\mid I_mA=AI_m,\ {}^tAA=E\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\middle| B\in O(m), C\in O(n-m)\right\}$$
$$\cong O(m)\times O(n-m)$$

である．よって，定理6.3(1)より極分解 $O(m,n-m)\simeq(O(m)\times O(n-m))\times\boldsymbol{R}^k$ を得る．なお，$k=\dim O(m,n-m)-\dim(O(m)\times O(n-m))=\frac{1}{2}n(n-1)-(\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1))=m(n-m)$（定理4.(2)）である．

(2), (3)の証明は同じであるので(3)を証明しよう．$SU(m,n-m)$ は $GL(n,\boldsymbol{C})$ の準代数部分群である（定理2.8）．$A\in SU(m,n-m)$ ならば $A^*\in SU(m,n-m)$ は容易である．

$$SU(m,n-m)\cap U(n)$$
$$=\{A\in M(n,\boldsymbol{C})\mid A^*I_mA=I_m, \det A=1, A^*A=E\}$$
$$=\{A\in M(n,\boldsymbol{C})\mid I_mA=AI_m, \det A=1, A^*A=E\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\middle| B\in U(m), C\in U(n-m), \det B\det C=1\right\}$$
$$=S(U(m)\times U(n-m))$$

である．よって，定理6.3(2)より極分解 $SU(m,n-m)\simeq S(U(m)\times U(n-m))\times\boldsymbol{R}^k$ を得る．なお，$k=\dim SU(m,n-m)-\dim(S(U(m)\times U(n-m)))=\dim SU(m,n-m)-\dim(SU(m)\times SU(n-m)\times S^1)$（補題6.8）$=(n^2-1)-((m^2-1)+((n-m)^2-1)+1)=2m(n-m)$ である（定理4.(2)）．

(4)　$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{H}$ に置きかえて(1)と同様にして証明できるので省略する．

定理6.4，6.5，6.7，6.9，補題6.8より次の定理6.10，6.11を得る．

定理6.10　$SU(m,n-m)$, $O(m,n-m)$, $SO(m,n-m)$, $Sp(n,\boldsymbol{C})$, $Sp(n,\boldsymbol{R})$, $Sp(m,n-m)$（以上 $n\geqq1$），$SL(n,\boldsymbol{C})$, $SL(n,\boldsymbol{R})$, $SU^*(2n)$, $O(n,\boldsymbol{C})$, $SO(n,\boldsymbol{C})$, $SO^*(2n)$（以上 $n\geqq2$）は compact でない．

定理6.11　(1)　$SL(n,\boldsymbol{C})$，$SL(n,\boldsymbol{R})$, $SU(m,n-m)$, $SU^*(2n)$, $SO(n,\boldsymbol{C})$, $SO^*(2n)$, $Sp(n,\boldsymbol{C})$, $Sp(n,\boldsymbol{R})$, $Sp(m,n-m)$ は連結である．

(2)　$O(n,\boldsymbol{C})$ は連結でなく，その連結成分の個数は 2 であり，$O(n,\boldsymbol{C})$ の単位元連結成分は $SO(n,\boldsymbol{C})$ である．

(3)　$O(m,n-m)$ は連結でなく，その連結成分の個数は 4 である．

(4)　$SO(m, n-m)$ は連結でなく，その連結成分の個数は 2 である．

Lorentz 群 $O(m, n-m)$, $SO(m, n-m)$ は連結でないことが分かったので，その単位元連結成分 $O(m, n-m)_0$, $SO(m, n-m)_0$ を具体的に表示することを試みよう．（$O(m, n-m)_0$ は代数群でない* ことが知られている）．

定理6.12　(1)　$O(m, n-m)$, $SO(m, n-m)$ の単位元連結成分 $O(m, n-m)_0$, $SO(m, n-m)_0$ は一致し，それは

$$\left\{\begin{pmatrix} B & T \\ S & C \end{pmatrix}\}^m \in O(m, n-m) \middle| \det B = \det C \geqq 1\right\}$$

である．

(2)　$O(m, n-m)_0 \simeq (SO(m) \times SO(n-m)) \times \boldsymbol{R}^{m(n-m)}$

証明　まず，$A=\begin{pmatrix} B & T \\ S & C \end{pmatrix} \in O(m, n-m)$ ならば

$$\det A = \frac{\det B}{\det C}$$

となることを示そう．実際，${}^tAI_mA=I_m$ の条件は

$${}^tBB-{}^tSS=E, \quad {}^tTT-{}^tCC=-E, \quad {}^tTB-{}^tCS=0$$

である．A の左から行列 $\begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tT & -{}^tC \end{pmatrix}$ を掛けると

$$\begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tT & -{}^tC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & T \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tBB & {}^tBT \\ {}^tTB-{}^tCS & {}^tTT-{}^tCC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tBB & {}^tBT \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

となる．この両辺の行列式をとると

$$((\det B)(-1)^{n-m} \det C) \det A = (\det B)^2(-1)^{n-m}$$

となり，これより $\det A = \dfrac{\det B}{\det C}$ を得る．(以上の操作を西川充氏より教わった)．さて，${}^tSS$ は非負対称行列である．(実際，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $({}^tSS\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{x}) \geqq 0$ となるので非負である)．したがって，${}^tSS$ の固有値 λ_i はすべて $\lambda_i \geqq 0$ である．よって，${}^tBB=E+{}^tSS$ の固有値 μ_i はすべて $\mu_i \geqq 1$ である．以上より，$(\det B)^2 = \det({}^tBB) = \mu_1 \cdots \mu_m \geqq 1$ となる．$A \in O(m, n-m)$ ならば，${}^tAI_mA=I_m$ より $\det A = \pm 1$ となることに注意すると，$\det A = \dfrac{\det B}{\det C}$ と併せて $O(m, n-m)$ は次の 4 つの連結成分をもつことが分かる．

$A=\begin{pmatrix} B & T \\ S & C \end{pmatrix}$ の表示は上記の通りとする．

$$O(m, n-m)_0=\{A\in O(m, n-m) | \det B=\det C\geqq 1\}$$
$$\simeq (SO(m)\times SO(n-m))\times \boldsymbol{R}^{m(n-m)}$$
$$O(m, n-m)_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} O(m, n-m)_0$$
$$=\{A\in O(m, n-m) | \det B=\det C\leqq -1\}$$
$$O(m, n-m)_2=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} O(m, n-m)_0$$
$$=\{A\in O(m, n-m) | \det B=-\det C\leqq -1\}$$
$$O(m, n-m)_3=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} O(m, n-m)_0$$
$$=\{A\in O(m, n-m) | \det B=-\det C\geqq 1\}$$

$SO(m, n-m)$ の 2 つの連結成分は $O(m, n-m)_0$, $O(m, n-m)_1$ である．

単連結についてはここでは触れていないが，上記の線型 Lie 群のうち，単連結なものを列記しておく（〔9〕参照）．

定 理 *6.13　$SL(n, \boldsymbol{C})$, $SU(n)$, $SU^*(2n)$, $Sp(n, \boldsymbol{C})$, $Sp(n)$, $Sp(m, n-m)$ は単連結である．

7. 連結な Lie 群のある性質

位相群の連結性に関するいくつかの命題を述べておく．ここで用いる連結に関する性質は，$f: M \to N$ を位相空間の連続写像とするとき，M が連結ならば $f(M)$ も連結になる（補題5.3）ことであろう．

補題7.1　G を位相群とする．H が G の開部分群ならば，H は G の閉部分群である．

証明

$$G = H \cup aH \cup bH \cup \cdots$$

を G の H による剰余類の分解とするとき

$$H = G - (aH \cup bH \cup \cdots)$$

となる．仮定より，H は G の開集合であるから，aH も G の開集合である．よって，$aH \cup bH \cup \cdots$ は G の開集合 $aH, bH, \cdots$ の和集合として G の開集合であり，H はその補集合として G の閉集合である．

命題7.2　位相群 G の単位元 1 を含む連結成分 G_0 は G の閉正規部分群である．さらに，G が Lie 群であるときには，G_0 は G の開正規部分群である．

証明　G_0 は G の連結成分として G の閉集合である（補題5.3）．写像 $\nu: G \to G, \nu(x) = x^{-1}$ は同相写像であるから，$\nu(G_0)$ は単位元 $1 = \nu(1)$ を含む G の連結成分である．よって，$\nu(G_0) = G_0$ となる．特に，$a \in G_0$ ならば $a^{-1} \in G_0$ となる．$a \in G_0$ に対し，写像 $l_a: G \to G, l_a(x) = ax$ は同相写像であるから，$l_a(G_0)$ は $1 = l_a(a^{-1})$（上記より $a^{-1} \in G_0$ に注意）を含む G の連結成分である．よって，$l_a(G_0) = G_0$ である．特に，$a, b \in G_0$ に対して $ab \in G_0$ である．以上で，G_0 が G の閉部分群であることが示された．また，$g \in G$ に対し，写像 $A_g: G \to G, A_g(x) = gxg^{-1}$ は同相写像であるから，$A_g(G_0)$ は単位元 $1 = A_g(1)$ を含む G の連結成分である．よって，$A_g(G_0) = G_0$ である．これは G_0 が G の正規部分群であることを示している．G が Lie 群であるときには，G は多様体であるから，G の各点は連結な近傍をもっている．そこで，$a \in G_0$ に対し，a の連結な近傍 U_a をとると $U_a \subset G_0$ である．これは G_0 が G の開集合であることを示している．

定理7.3　G を線型 Lie 群とするとき，G の単位元連結成分 G_0 も線型 Lie 群であり，両者の Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0$ は一致する：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0$$

証明　G は $GL(n, K)$ の閉部分群であるとする：$G \subset GL(n, K)$．G_0 は G の閉部分群になる（命題7.2）から，G_0 は $GL(n, K)$ の閉部分群になる．よって，G_0 は線型 Lie 群である．さて，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して，写像 g：$\boldsymbol{R} \to G$ を $g(t)=\exp tX$ で定義する．g は連続写像である．実際，$t_m \in \boldsymbol{R}$ が $\lim_{m\to\infty} t_m = t$ とするとき

$$\lim_{m\to\infty} \exp t_m X = \exp \lim_{m\to\infty} t_m X \text{（補題4.2）} = \exp tX$$

となるからである．$\boldsymbol{R}$ は（弧状）連結であり，かつ $E=g(0)$ であるから $g(\boldsymbol{R}) \subset G_0$，すなわち

$$\exp tX \in G_0 \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

となる．よって，$X \in \mathfrak{g}_0$ である．以上で，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_0$ が示された．逆に $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ は明らかである．よって，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0$ である．

例7.4　回転群 $SO(n)$ は直交群 $O(n)$ の単位元連結成分であった（定理5.11）．したがって，両者の Lie 環は一致している（定理7.3）：$\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{o}(n)$．当然ながら，$SO(n)$ と $O(n)$ は群としては異なるものである（群同型とはならない）．このことは，$SO(n)$ と $O(n)$ の群としての相違をその Lie 環 $\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{o}(n)$ からは読み取ることができないことを示している．

命題7.5　(1)　G を連結な位相群とするとき，G の単位元 1 の任意の近傍 U は群 G を生成する．すなわち，G の任意の元 a は

$$a=u_1 \cdots u_m \qquad u_i \in U$$

と表わされる．

(2)　G を連結な線型 Lie 群とするとき，G の任意の元 A は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元を用いて

$$A=\exp X_1 \cdots \exp X_m \qquad X_i \in \mathfrak{g}$$

と表わされる．

証明　(1)　$V=U \cap U^{-1}$ とおくと，V は G の単位元 1 の近傍であって，$V^{-1}=V$ をみたしている．G の部分集合列 $V, V^2=VV, V^3=V^2V, \cdots, V^m=V^{m-1}V, \cdots$ を考え，その和集合を H とおく：

$$H=\bigcup_{m=1}^{\infty} V^m$$

H は G の開集合である．実際，$V^2 = \bigcup_{a \in V} aV$ は，G の開集合 aV の和集合として G の開集合である．同様に $V^3, \cdots, V^m, \cdots$ も G の開集合であり，さらに，これらの和集合として H は G の開集合である．H は G の部分群である．実際，$a, b \in H$ ならば，$a \in V^m, b \in V^n$ となる自然数 m, n が存在するので，$ab \in V^m V^n = V^{m+n} \subset H$ となる．また，$a \in H$ が $a \in V^m$ とすると，$a = v_1 \cdots v_m$，$v_i \in V$ と表わせるので，$a^{-1} = v_m^{-1} \cdots v_1^{-1} \in V^{-1} \cdots V^{-1} = V^m \subset H$ となる．以上で，H が G の開部分群であることが分かった．補題7.1より，H は G の閉部分群でもある．G は連結であるから，G の開集合かつ閉集合である H は G に一致しなければならない：$G = H$．これは G が V で生成されていることを示している．$V \subset U$ であるから，当然 G は U で生成されている．

(2)　G が線型 Lie 群であるときには，単位元 E の近傍 U を適当に選べば，U の各元は $\exp X, X \in \mathfrak{g}$ と表わせる（定理4.10）．これと(1)の結果を併せると(2)が得られる．

次の命題7.6は群の連結性と関係ないが，後で用いるので書いておく．

定義　G を群とする．

$$z(G) = \{c \in G \mid cx = xc(\text{すべての } x \in G)\}$$

を G の**中心**という．

G の中心 $z(G)$ は明らかに G の正規部分群である．

定義　M を位相空間とする．M の部分集合 D が**離散**であるとは，D の任意の点 x に対し，x の M における近傍 U が存在し，$D \cap U = \{x\}$ となることである．

命題7.6　G を線型 Lie 群とする．

(1)　G の中心 $z(G)$ は G の閉正規部分群である．

(2)　G の離散部分群 D は G の閉部分群である．

したがって，線型 Lie 群 G の中心 $z(G)$ は線型 Lie 群であり，G の離散部分群 D も線型 Lie 群である．

証明　(1)　点列 $c_1, c_2, \cdots, c_m, \cdots \in z(G)$ が $\lim_{m \to \infty} c_m = c \in G$ とするとき，すべての $x \in G$ に対して

$$cx = (\lim_{m \to \infty} c_m)x = \lim_{m \to \infty} c_m x = \lim_{m \to \infty} x c_m = x \lim_{m \to \infty} c_m = xc$$

となる．よって，$c \in z(G)$ である．これは $z(G)$ が G の閉集合であることを示している．

(2) D が G の閉集合でないとすると，点列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots \in D$, $\lim_{m\to\infty} x_m = a \in G$ で $a \notin D$ となるものが存在する．D は離散であるから，G の単位元 1 の近傍 U が存在して $D \cap U = \{1\}$ となる．$a^{-1}a=1$ であるから，a の近傍 V_a で $V_a^{-1}V_a \subset U$ なるものがとれる．$\lim_{m\to\infty} x_m = a$ であるから，V_a は十分大きい番号の m の x_m をすべて含んでいる．一方，$d, d' \in D \cap V_a$ とすると，$d^{-1}d' \in D \cap V_a^{-1}V_a \subset D \cap U = \{1\}$ より $d = d'$ となるので，$D \cap V_a$ は 1 点しか含んでいない．これは矛盾である．よって，D は G の閉集合である．

最後に，連結な位相群のもつ重要な性質をもう 1 つあげておく．

命題7.7　G を連結な位相群とする．N を G の離散な正規部分群とすると，N は G の中心 $z(G)$ に含まれる：

$$N \subset z(G).$$

証明　$a \in N$ に対し，写像 $f_a : G \to N$ を $f_a(x) = xax^{-1}$ で定義する．(N は G の正規部分群であるから，$xax^{-1} \in N$ である)．f_a は連続写像であり，G は連結であるから，$f_a(G)$ も連結である．しかるに N は離散であるから，$f_a(G)$ は 1 点のみからなる．$f_a(G)$ は $a = 1a1^{-1}$ を含むから $f_a(G) = \{a\}$ である．すなわち，任意の $x \in G$ に対し $xax^{-1} = a, xa = xa$ となり，$a \in z(G)$ となる．よって，$N \subset z(G)$ である．

8. Lie 群の準同型写像

2つの群 G, G' の間の関係を調べるのに，群準同型写像 $f: G\to G'$ を用いるように，2つの Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の関係を調べるのに，Lie 環準同型写像 $h: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が用いられる．この節では，$f: G\to G'$ を2つの線型 Lie 群の間の連続な準同型写像とするとき，f はそれらの Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間の $\boldsymbol{R}$-Lie 環準同型写像 $f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ を誘導することを示そう．まず定義から始めよう．

定義　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を K-Lie 環とする．K-線型写像 $h: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が

$$h([X, Y])=[h(X), h(Y)] \qquad X, Y\in\mathfrak{g}$$

をみたすとき，h は **$\boldsymbol{K}$-Lie 環準同型写像**であるという．さらに，h が全単射であるとき，h は **$\boldsymbol{K}$-Lie 環同型写像**であるという．$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間に K-Lie 環同型写像 $h: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が存在するとき，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ は **$\boldsymbol{K}$-Lie 環として同型**であるといい，$\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}'$ で表わす．

線型 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して，写像 $g: \boldsymbol{R}\to G$ を

$$g(t)=\exp tX$$

で定義すると，g は連続であって（補題4.2），かつ

$$g(s+t)=g(s)g(t) \qquad s, t\in\boldsymbol{R}$$

をみたしている（補題4.1）．これは，$\boldsymbol{R}$ を和 $s+t$ に関して位相群とみなしたとき，g が連続な群準同型写像であることを示している．以下で，この逆がなりたつことを示そう．

命題8.1　G を線型 Lie 群とする．$g: \boldsymbol{R}\to G$ を連続な群準同型写像とすると，g は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X を用いて

$$g(t)=\exp tX \qquad t\in\boldsymbol{R}$$

と表わされる．この X は g に対して一意に定まる．

証明　写像 $\exp: \mathfrak{g}\to G$ は局所同相であるので，$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍 V と G の単位元 E の近傍 U が存在して，$\exp: V\to U$ が同相写像を与えている（定理4.9）（$-V=V$（したがって $U^{-1}=U$）としておく）．この逆写像を

$$\log: U\to V$$

で表わすことにする：

$$\exp\log A=A, A\in U,\quad \log\exp X=X, X\in V$$

自然数 m に対して $\exp mX=(\exp X)^m$ がなりたつので

$$A, A^m\in U \quad ならば \quad \log(A^m)=m\log A,\ \log(A^{-1})=-\log A$$

がなりたつ．$g:\boldsymbol{R}\to G$ は

$$g(s+t)=g(s)g(t) \qquad s, t\in\boldsymbol{R}$$

をみたすから，$s=t=0$ とおくと $g(0)=g(0)g(0)$ となるので，$g(0)=E$ となる．g は連続であるから，G の単位元 E の上記の近傍 U に対して，正数 δ が存在し

$$|t|<\delta \quad ならば \quad g(t)\in U$$

にできる．写像 $h:(-\delta,\delta)\to V$ を

$$h(t)=\log g(t)$$

で定義する．

主張　$s, t\in\boldsymbol{R}$ に対し

$$|t|<\delta, |st|<\delta \quad ならば \quad h(st)=sh(t)$$

がなりたつ．

実際，(1)　$s=m$（自然数）のとき，$|t|<\delta, |mt|<\delta$ ならば

$$h(mt)=\log g(mt)=\log(g(t)^m)=m\log g(t)=mh(t)$$

となり，主張がなりたつ．

(2)　$s=\dfrac{m}{n}$（m, n が自然数）のとき，$|t|<\delta, \left|\dfrac{m}{n}t\right|<\delta$ ならば，$\dfrac{t}{n}=t'$ とおいて

$$h\left(\frac{m}{n}t\right)=h(mt')=mh(t')\ ((1)の結果)$$

$$=\frac{m}{n}h(nt')\ ((1)の結果)=\frac{m}{n}h(t)$$

となり，主張がなりたつ．

(3)　$s=r$（有理数）のとき，$r>0$ ならば(2)である．一般に，$g(t)g(-t)=g(t+(-t))=g(0)=E$ より $g(-t)=g(t)^{-1}$ となるので，$|t|<\delta$ ならば $h(-t)=-h(t)$ となる．よって，$r>0$ の有理数でなりたてば，$r<0$ の有理数 r に対してもなりたつ．

(4)　s が実数のとき，s に対して有理数 r_m が存在して $\lim_{m\to\infty} r_m=s$ にできる．$|st|<\delta$ であるので，ある番号より先の r_m に対して $|r_mt|<\delta$ となってい

る．$\lim_{m\to\infty} r_m t = st$ であるから，h の連続性より

$$h(st)=\lim_{m\to\infty} h(r_m t)=\lim_{m\to\infty} r_m h(t)=sh(t)$$

となり，主張が証明された．

さて，$0<t_0<\delta$ なる t_0 をとり

$$X=\frac{1}{t_0}h(t_0)$$

とおく．このとき，$|t|<\delta$ ならば

$$g(t)=\exp h(t)=\exp h\left(\frac{t}{t_0}t_0\right)=\exp\frac{t}{t_0}h(t_0)\ (\text{主張})=\exp tX$$

となる．一般の実数 t に対しては，自然数 N を十分大きくとって $\left|\frac{t}{N}\right|<\delta$ とすると

$$g(t)=\left(g\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N=\left(\exp\frac{t}{N}X\right)^N=\exp tX$$

と表わすことができた．最後に，g に対して X が一意に定まることを示そう．$\exp tX=g(t)=\exp tY$, X, $Y\in\mathfrak{g}$ とするとき，t で微分すると $X\exp tX=Y\exp tY$ となるが，$t=0$ とおいて $X=Y$ を得る．（または，$|t|$ を十分小さくとり，$tX, tY\in V$ としておいて，log をとってもよい）．

定義　G, G' を線型 Lie 群とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をそれぞれの Lie 環とし，$f: G\to G'$ を連続な群準同型写像とする．このとき，$\boldsymbol{R}$-Lie 環準同型写像

$$f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$$

を次のように定義する．$X\in\mathfrak{g}$ に対し，$g: \boldsymbol{R}\to G'$ を $g(t)=f(\exp tX)$ で定義すると，g は連続な群準同型写像であるから，$X'\in\mathfrak{g}'$ を用いて $g(t)=\exp tX'$ と表わすことができる（命題8.1）．この X' は X に対して一意に定まる（命題8.1）ので，$f_*(X)=X'$ とおく：

$$f(\exp tX)=\exp t(f_*(X))$$

主張　$f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環準同型写像である．

(1)　$f_*(\lambda X)=\lambda f_*(X)$　　$\lambda\in\boldsymbol{R}, X\in\mathfrak{g}$

実際，$\exp tf_*(\lambda X)=f(\exp t\lambda X)=\exp(t(\lambda f_*X))$ となるからである．

(2)　$f_*(X+Y)=f_*(X)+f_*(Y)$　　$X, Y\in\mathfrak{g}$

実際，$f\left(\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{tY}{m}\right)^m\right)=\left(f\left(\exp\frac{tX}{m}\right)f\left(\exp\frac{tY}{m}\right)\right)^m=\left(\exp\frac{tf_*(X)}{m}\exp\frac{tf_*(Y)}{m}\right)^m$ において $m\to\infty$ とすると，命題4.5より

$$f(\exp t(X+Y))=\exp(t(f_*(X)+f_*(Y)))$$

となる．この左辺は定義より $\exp tf_*(X+Y)$ であるから，一意性より（命題8.1）より，$f_*(X+Y)=f_*(X)+f_*(Y)$ を得る．

(3)　$f_*([X, Y])=[f_*(X), f_*(Y)]$　　$X, Y\in\mathfrak{g}$

実際，$f\left(\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{Y}{m}\left(\exp\frac{tX}{m}\right)^{-1}\left(\exp\frac{Y}{m}\right)^{-1}\right)^{m^2}\right)=\left(\exp\frac{tf_*(X)}{m}\exp\frac{f_*(Y)}{m}\left(\exp\frac{tf_*(X)}{m}\right)^{-1}\left(\exp\frac{f_*(Y)}{m}\right)^{-1}\right)^{m^2}$ において $m\to\infty$ とすると，命題4.5より

$$f(\exp t[X, Y])=\exp(t[f_*(X), f_*(Y)])$$

となる．この左辺は定義より $\exp tf_*([X, Y])$ であるから，一意性より（命題8.1）より，$f_*([X, Y])=[f_*(X), f_*(Y)]$ を得る．

この写像 $f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ を連続な群準同型写像 $f: G\to G'$ から**誘導された Lie 環準同型写像**という．f_* は df と書かれる方がより一般的であるかもしれない．そして df は f の**微分**ともよばれている．

次の命題は以後しばしば用いられ非常に有用である．

命題8.2　G, G' を線型 Lie 群，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をそれぞれの Lie 環とし，$f: G\to G'$ を連続な群準同型写像とする．

(1)　G が連結であるとき，$f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が well-defined ならば $f: G\to G'$ も well-defined である．

(2)　G' が連結であるとき，$f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が全射ならば $f: G\to G'$ も全射である．

証明　(1)（命題の意味が曖昧かもしれないので説明しよう．G' を部分群として含む線型 Lie 群 $\widetilde{G}$ に対して，連続な群準同型写像 $f: G\to\widetilde{G}$ が定義されているとする．$\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\widetilde{G}$ の Lie 環とし，f の誘導する Lie 環準同型写像 $f_*: \mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$ が

$$f_*(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{g}'\quad \text{ならば}\quad f(G)\subset G'$$

となることを主張している）．G は連結な線型 Lie 群であるから，$A\in G$ は

$$A=\exp X_1\cdots\exp X_m\qquad X_i\in\mathfrak{g}$$

と表わすことができる（命題7.5）．さて

$$\begin{aligned}f(A)&=f(\exp X_1\cdots\exp X_m)\\&=f(\exp X_1)\cdots f(\exp X_m)\\&=\exp f_*(X_1)\cdots\exp f_*(X_m)\in G'\end{aligned}$$

となる.

(2)　G' は連結な線型 Lie 群であるから, $A' \in G'$ は

$$A' = \exp X_1' \cdots \exp X_m' \qquad X_i' \in \mathfrak{g}'$$

と表わすことができる(命題7.5). $f_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が全射であるから, $f_*(X_i) = X_i'$, $i=1, \cdots, m$ となる $X_i \in \mathfrak{g}$ が存在する. さて, $A = \exp X_1 \cdots \exp X_m \in G$ を考えると

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\exp X_1 \cdots \exp X_m) \\ &= f(\exp X_1) \cdots f(\exp X_m) \\ &= \exp f_*(X_1) \cdots \exp f_*(X_m) \\ &= \exp X_1' \cdots \exp X_m' = A' \end{aligned}$$

となるので, f は全射である.

群論で次のことを知っている. G を群とし, N を G の正規部分群とする. G を N により剰余類に分解する:

$$G = N \cup aN \cup bN \cup \cdots$$

この剰余類全体の集合 $G/N = \{N, aN, bN, \cdots\}$ において積を

$$(aN)(bN) = abN$$

で定義すると, G/N は群になる. G が位相群であるときには, G/N に等化位相をいれると, G/N は位相群になる.

以下に, 群の準同型定理について述べる.

命題8.3　G, G' を群とし, $f: G \to G'$ を全射群準同型写像とする. このとき, $\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G \mid f(g) = 1'\}$ は G の正規部分群であり, $G/\mathrm{Ker}\, f$ は G' に群として同型になる:

$$G/\mathrm{Ker}\, f \cong G'$$

証明　$N = \mathrm{Ker}\, f$ とおく. 写像 $\bar{f}: G/N \to G'$ を

$$\bar{f}(gN) = f(g)$$

で定義する ($\bar{f}$ は well-defined である). この $\bar{f}$ が群の同型を与えている.

G, G' が位相群であるときには, たとえ全射群準同型写像 $f: G \to G'$ が連続であっても, $G/\mathrm{Ker}\, f$ が G' と位相群として同型になるとは限らない. しかし, G, G' にある種の位相的な条件を付け加えると準同型定理がなりたつ.

命題8.4　G を compact 位相群, G' を Hausdorff 位相群とし, $f: G \to G'$ を連続な全射群準同型写像とする. このとき, $\mathrm{Ker}\, f$ は G の閉正規部分群であり, $G/\mathrm{Ker}\, f$ は G' に位相群として同型になる:

$$G/\mathrm{Ker}\, f \cong G'$$

証明　命題8.3の群同型写像 $\bar{f}: G/\mathrm{Ker}\, f \to G'$, $\bar{f}(g\,\mathrm{Ker}\, f)=f(g)$ は連続である．G が compact であるから $G/\mathrm{Ker}\, f$ は compact であり，G' は Hausdorff 空間であるから，$\bar{f}$ は同相写像になる（補題5.1）．

命題8.4はさらに次の命題8.5に拡張される．

定義　M を位相空間とする．M の各点 x に対し，$\bar{V}$（V を含む最小の M の閉集合）が compact となるような x の近傍 V が存在するとき，M は**局所 compact** であるという．（多様体 M は局所 compact である）．

命題*8.5　G を可算開基をもつ局所 compact, Hausdorff 位相群，G' を局所 compact，Hausdorff 位相群とし，$f: G \to G'$ を連続な全射群準同型写像とする．このとき，$\mathrm{Ker}\, f$ は G の閉正規部分群であり，$G/\mathrm{Ker}\, f$ は G' に位相群として同型になる：

$$G/\mathrm{Ker}\, f \cong G'$$

証明は省略した（〔9〕命題8.1）．

Lie 群 G は多様体であるから局所 compact である．したがって，Lie 群 G, G' に対しては命題8.5の条件がみたされて準同型定理がなりたつ．G, G' を線型 Lie 群として再記しよう．

定理8.6　G, G' を線型 Lie 群とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をそれぞれの Lie 環とする．$f: G \to G'$ を連続な全射群準同型写像とするとき，$\mathrm{Ker}\, f$ は G の閉正規部分群であり，$G/\mathrm{Ker}\, f$ は G' に位相群として同型になる．（実は $G/\mathrm{Ker}\, f$ は Lie 群になり，Lie 群として同型となる）：

$$G/\mathrm{Ker}\, f \cong G'$$

なお，$N=\mathrm{Ker}\, f$ は線型 Lie 群になるが，その Lie 環 $\mathfrak{n}$ は，f の誘導する Lie 環準同型写像 $f_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ の $\mathrm{Ker}\, f_*=\{X \in \mathfrak{g} \mid f_*(X)=0\}$ に一致する：

$$\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}\, f_*$$

証明　定理の前半は命題8.5でよいとして後半を証明しよう．$X \in \mathfrak{n}$ とすると，すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tX \in \mathrm{Ker}\, f$，すなわち $f(\exp tX)=E$ となる．よって，$\exp tf_*(X)=E$ である．これを t で微分して $t=0$ とおくと，$f_*(X)=0$ となり，$X \in \mathrm{Ker}\, f_*$ を得る．逆に $X \in \mathrm{Ker}\, f_*$ とすると，$f(\exp tX)=\exp tf_*(X)=\exp t0=E$ より $\exp tX \in \mathrm{Ker}\, f$ となる．よって $X \in \mathfrak{n}$ である．

後で $\mathrm{Ker}\, f$ が離散群であるときを取り扱うことが多いので，これを次の命題にまとめておこう．

命題8.7　G, G' を線型 Lie 群とし，$f: G \to G'$ を連続な群準同型写像とす

る．次の 3 つの条件

(1)　G' は連結である

(2)　Ker f は離散である

(3)　dim G＝dim G'

を仮定するならば，位相群としての（実は Lie 群としての）同型

$$G/\mathrm{Ker}\, f \cong G'$$

がなりたつ．

証明　N＝Ker f は離散群であるから，その単位元連結成分は E のみである．よって，N の Lie 環 $\mathfrak{n}$ は 0 のみよるなる(定理7.3)：$\mathfrak{n}=\{0\}$．したがって，f が誘導する Lie 環準同型写像 $f_*: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ は単射である(定理8.6)．しかるに dim $\mathfrak{g}$＝dim G＝dim G′＝dim $\mathfrak{g}'$ であるから（線型代数でよく知られた定理(〔 9 〕補題12）より）f_* は全射になる．G' は連結であるから，$f: G\to G'$ も全射になる(命題8.2)．よって，定理8.6より，位相群としての同型 $G/\mathrm{Ker}\, f\cong G'$ を得る．

書ですが，私の数学に役立ったかどうかは甚だ疑問です．助手になった当座は大阪大学に通って，安西先生の所で de Rahm のコホモロジーのゼミをしていました．その夏頃になって山辺英彦先生がアメリカから帰ってみえて，アメリカでは「sheaf 理論」がはやっていて，de Rahm 理論はそれから直ちに導かれるといわれ，ゼミを止めてしまいました．安西先生は，その後しばらくして癌でなくなられました．

当時 Lie 群をやっている者は Hilbert の第 5 の問題（章を改めて述べますので読んでみて下さい）に取り組んでいました．私もそれをやらなければいけないと思い，その方面の第一人者である山辺先生の論文を頂いて読んだりしていましたが，大学を出て 3 年目でしたかこの問題が解けたという報がはいって来ました．私にはその本質が分らずじまいに終ってしまったわけですが，このような世紀の大問題に凡人が取り組んではいけないというよい教訓を得たような気がします．もし，何時までも未解決のままだと，一生を棒に振ったかもしれないと思うと恐しいことだと思います．

Hilbert の第 5 の問題を考察していた者はそれぞれ方向転換したようです．私も大阪市大のトポロジーゼミに参加させてもらいました．私の初めての仕事はユニタリ群 $U(n)$，$SU(n)$ の胞体分割でした．その前，大阪大学で，村上信吾先生，森本明彦君が Freudenthal の「Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie」を読んでいました．さて，等質空間 $G_2/SU(3)\simeq S^6$ から例外群 G_2 の胞体分割が得られないかという村上先生のお勧めもありこれを考えることにしました．しかし，ユニタリ群 $SU(n)$ の胞体分割も分かっていないことに気付き，まずこれから片づけることにしました（村上先生は，こんなものはとっくに分かっていると思っていたということでした）．数学の思考には catastrophy（不連続の）現象が起るようです．1 年以上考えに考えて進展が無かったものが一夜にして出来上るものです．まさに $SU(n)$ の胞体分割がそれで，不思議に瞬時にできたのです．私が28才の結婚 1 年目で，生まれたばかりの小供が泣いていた状況が今でもはっきり思い出されます．これが私の初めての仕事であったためか，興奮して 3 日間程全く寝られなかったことを覚えています．拙著「群と位相」裳華房の第 3 章に詳述していますので興味のある方は目を通して下さい．やがてシンプレクティック群 $Sp(n)$ の胞体分割もできましたが，肝心の G_2，（さらに F_4）の胞体分割は未だにできません．私は最も多くの時間をかけたつもりですがうまくいきません．

（p. 90 へつづく）

9. Lie 群の中心

群 G の中心 $z(G)$ は，G が連結な単純 Lie 群であるときには特に重要な意味をもっている．連結な単純 Lie 群 G の中心 $z(G)$ は G の離散な正規部分群になっているのである．(逆に，G の離散な正規部分群 N は G の中心 $z(G)$ に含まれていた（命題7.7)）．一般に，Lie 群 G の離散な正規部分群 N に対して，G と剰余群 G/N は同じ Lie 環 $\mathfrak{g}$ をもっている．そして，それは G を被覆群にもつ Lie 群 G/N をすべて決定する問題に一致することになっている．すべての連結単純 Lie 群を決定するためには，単連結な単純 Lie 群の中心を決定することが必要となるが，（単連結単純 Lie 群は線型 Lie 群になるとは限らないので）ここでは単純線型 Lie 群の中心を決定するにとどまっている．（単連結単純 Lie 群の中心は決定されている．A.I. Sirota — A.S. Solodovnikov, Non-compact semi-simple Lie groups, Uspehi Mat. Nauk, 18, 3(1963)．M. Goto—S. Kobayashi, On the subgroups of the centers of simply connected Lie groups—classification of simple Lie groups in the large, Osaka J. Math. 6(1969))．

以下，$\boldsymbol{Z}_n$ は位数 n の巡回群を表わしている．

補題9.1　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{C}', \boldsymbol{H}', \boldsymbol{C}^c, \boldsymbol{H}^c$) とする．行列 $A\in M(n, K)$ が $O(n)$ の各元と交換可能ならば $A=aE$, $a\in K$ となる．また，$n\geqq 3$ ならば，$A\in M(n, K)$ が $SO(n)$ の各元と交換可能でも $A=aE$, $a\in K$ となる．

証明　A が $I_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n\end{pmatrix}$, $\varepsilon_i=\pm 1$ の形のすべての行列と交換可能より，A は対角行列

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix} \qquad a_i\in K$$

となる．（$n\geqq 3$ ならば，$\det I_\varepsilon=1$ の条件を付加してもよい）．さらに，A が

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & J & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の形のすべての元と交換可能とすると $a_1=\cdots=a_n$ となり，$A=aE, a\in K$ となる．

これから，2 節で与えた線型 Lie 群の中心を求めるのであるが，証明中に，「逆にこれは中心の元である」を省略している．それが自明であるからである．

定理9.2　(1)　$(z(SO(2))=SO(2))$

$$z(SO(n))=\begin{cases} \{E\} & n \text{ 奇数} \\ \{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2 & n \text{ 偶数} \geqq 4 \end{cases}$$

(2)　$(z(SO(2, \boldsymbol{C}))=SO(2, \boldsymbol{C}))$

$$z(SO(n, \boldsymbol{C}))=\begin{cases} \{E\} & n \text{ 奇数} \\ \{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2 & n \text{ 偶数} \geqq 4 \end{cases}$$

証明　(1)　$\left(SO(2)=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta\in\boldsymbol{R}\right\}\right.$ は可換群であるから，その中心は $SO(2)$ 自身である)．$n\geqq 3$ ならば，$A\in z(SO(n))$ は補題9.1より，$A=aE, a\in\boldsymbol{R}$ となる．$\det A=1$ の条件より $a^n=1$ となるので，n が奇数のとき $a=1$, n が偶数のとき $a=\pm 1$ である．

(2)　$\left(SO(2, \boldsymbol{C})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b\in\boldsymbol{C}, a^2+b^2=1\right\}\right.$ は可換群であるから，その中心は $SO(2, \boldsymbol{C})$ 自身である)．$n\geqq 3$ ならば，$A\in z(SO(n, \boldsymbol{C}))$ は補題9.1より $A=aE, a\in\boldsymbol{C}$ となる．${}^tAA=E$ より $a^2=1$ であり，さらに $\det A=1$ の条件より $a^n=1$ となる．これより結果を得る．

定理9.3　(1)　$z(SL(n, \boldsymbol{R}))=\begin{cases} \{E\} & n \text{ 奇数} \\ \{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2 & n \text{ 偶数} \end{cases}$

(2)　$z(SL(n, \boldsymbol{C}))=\{aE | a\in\boldsymbol{C}, a^n=1\}=\boldsymbol{Z}_n$

(3)　$z(SU(n))=\{aE | a\in\boldsymbol{C}, a^n=1\}=\boldsymbol{Z}_n$

証明　(1)　$A\in z(SL(n, \boldsymbol{R}))$ とする．$n\geqq 3$ ならば，補題9.1より $A=aE, a\in\boldsymbol{R}$ となる．$\det A=1$ の条件より $a^n=1$ となるので，n が奇数のとき $a=1$, n が偶数のとき $a=\pm 1$ である．$n=2$ ならば，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ との可換性よ

り，$A=\pm E$ を得る．

(2)　$A\in z(SL(n, C))$ とする．$n\geqq 3$ ならば，補題9.1より $A=aE, a\in \boldsymbol{C}$ となる．det $A=1$ の条件より $a^n=1$ である．$n=2$ のときも(1)と同様である．

(3)　$A\in z(SU(n))$ とする．$n\geqq 3$ ならば，補題9.1より $A=aE, a\in \boldsymbol{C}$ となる．det $A=1$ の条件より $a^n=1$ である．$n=2$ ならば，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$ との可換性より，$A=\pm E$ を得る．

定理9.4　(1)　$z(Sp(n))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(2)　$z(Sp(n, \boldsymbol{R}))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(3)　$z(Sp(n, C))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

証明　(1)　$A\in z(Sp(n))$ は補題9.1より $A=aE, a\in \boldsymbol{H}$ となる．さらに，$\boldsymbol{i}E, \boldsymbol{j}E, \boldsymbol{k}E$ との可換性より $a\in \boldsymbol{R}$ となる．$A^*A=E$ より $a^2=1$ となり，$A=\pm E$ である．

(2)　$Sp(n, \boldsymbol{R})\cong Sp(n, \boldsymbol{H}')$ (定理3.6) であるから $z(Sp(n, \boldsymbol{H}'))$ を求めよう．$A\in z(Sp(n, \boldsymbol{H}'))$ は補題9.1より $A=aE, a\in \boldsymbol{H}'$ となる．さらに，$\boldsymbol{i}'E, \boldsymbol{j}E, \boldsymbol{k}'E$ との可換性より $a\in \boldsymbol{R}$ となる．$A^*A=E$ より $a^2=1$ となり，$A=\pm E$ である．そして $Sp(n, \boldsymbol{H}')\cong Sp(n, \boldsymbol{R})$ の同型対応で $\pm E$ は $\pm E$ に移っている．

(3)　$Sp(n, C)\cong Sp(n, \boldsymbol{H}^C)$ (定理3.6) であるから $z(Sp(n, \boldsymbol{H}^C))$ を求めよう．$A\in z(Sp(n, \boldsymbol{H}^C))$ は(1)と同様にすれば $A=aE, a\in C$ となる．$A^*A=E$ より $a^2=1$ となり，$A=\pm E$ である．そして $Sp(n, \boldsymbol{H}^C)\cong Sp(n, C)$ の同型対応で $\pm E$ は $\pm E$ に移っている．

定理9.5　(1)　$z(SO^*(2n))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(2)　$z(SU^*(2n))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

証明　(1)　$A\in z(SO^*(2n))$ とする．A は $JA=\bar{A}J$ をみたすので，命題1.17 (2) の写像 k を用いて $A=k(B), B\in M(n, \boldsymbol{H})$ と表わせる．$k(U(n))\subset SO^*(2n)$ である (定理6.7) から B は $U(n)$ の各元と可換となる．よって，補題9.1より $B=aE, a\in \boldsymbol{C}$ となる．一方，A は $J\in SO^*(2n)$ と可換であるから $JA=\bar{A}J$ と併せて $A=\bar{A}$ となる．これより $a\in \boldsymbol{R}$ が分かり，$A=k(B)=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．det $A=1$ の条件より $a^{2n}=1$ となり，$A=\pm E$ である．

(2)　$A\in z(SU^*(2n))$ とする．A は $JA=\bar{A}J$ をみたすから $A=k(B), B\in M(n, \boldsymbol{H})$ と表わせる．$k(Sp(n))\subset SU^*(2n)$ である (定理6.7) から B は $Sp(n)$ の各元と可換となる．定理9.4(1)と同様にして $B=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．

よって，$A=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．det $A=1$ の条件より $a^{2n}=1$ となり，$A=\pm E$ である．

定理9.6　(1)　($z(O(1,1)_0)=O(1,1)_0$)

$$z(O(m,n-m)_0)=\begin{cases}\{E\} & n \text{ 奇数または } m, n-m \text{ 共に奇数} \\ & (O(1,1)_0 \text{ を除く}) \\ \{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2 & m, n-m \text{ 共に偶数}\end{cases}$$

(2)　$z(SU(m,n-m))=\{aE \mid a\in \boldsymbol{C}, a^n=1\}=\boldsymbol{Z}_n$

(3)　$z(Sp(m,n-m))=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$

証明　(1)　($O(1,1)_0=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a, b\in \boldsymbol{R}, a^2-b^2=1, a\geqq 1\right\}$ は可換群であるから，その中心は $O(1,1)_0$ 自身である)．$A\in z(O(m,n-m)_0)$ とする．$O(m,n-m)_0\cong O(n-m,m)_0$ であるから $m\geqq n-m$ としておく．A は $SO(m)\times SO(n-m)$ の各元と可換である（補題6.8，定理6.9）ので，$m\geqq n-m\geqq 3$ ならば補題9.1などを用いて $A=\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE\end{pmatrix}$，$a, b\in \boldsymbol{R}$ となる．さらに，

$$L=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & 0 & & 1 \\ & 1 & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & \\ 1 & & 0 & & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

との可換性より $a=b$ となり，$A=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．$m\geqq 3, n-m=2$ のときには，補題9.1などより $A=\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix}$，$a\in \boldsymbol{R}, D\in M(2,\boldsymbol{R})$ の形になることが分かるが，再び L との可換性より，$A=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．$m=n-m=2$ のときには，L と $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 等との可換性より，やはり $A=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．$n-m=1$ のときにも $m\geqq 3$, $m=2$ の場合を考慮して，やはり $A=aE, a\in \boldsymbol{R}$ となる．さて，$A=\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & aE\end{pmatrix}\}m=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}$ とおくとき，$A\in O(m,n-m)_0$ ならば det $B=$det $C\geqq 1$, det $A=1$ である（定理6.12）ことを用いれば結果を得る．

(2)　$A\in z(SU(m,n-m))$ とする．A は $SU(m)\times SU(n-m)$ の各元と可換である（補題6.8，定理6.9）から(1)と同様すると（$m=2$ または $n-m=2$

のときは$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$との可換性も考慮して）$A=\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE \end{pmatrix}$, $a, b \in \boldsymbol{C}$ であることが分かる．さらに，L との可換性より $a=b$ となり，$A=aE$, $a \in \boldsymbol{C}$ となる．det $A=1$ の条件より $a^n=1$ である．

(3)　$A \in z(Sp(m, n-m))$ とする．A は $Sp(m) \times Sp(n-m)$ の各元と可換である（定理6.9）から，補題9.1などを用いると $A=\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE \end{pmatrix}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ であることが分かる．さらに，L との可換性より $a=b$ となり，$A=aE$, $a \in \boldsymbol{R}$ となる．$A^* I_m A = I_m$ より $a^2=1$ となり，$A=\pm E$ である．

次の定理にある群は連結でないか，または単純でないかであるが，その中心を求めておこう．

定理9.7

(1)　$z(GL(n, \boldsymbol{R}))=\{aE | a \in \boldsymbol{R}, a \neq 0\}=\boldsymbol{R}^*$

(2)　$z(GL(n, \boldsymbol{C}))=\{aE | a \in \boldsymbol{C}, a \neq 0\}=\boldsymbol{C}^*$

(3)　$z(GL(n, \boldsymbol{H}))=\{aE | a \in \boldsymbol{R}, a \neq 0\}=\boldsymbol{R}^*$

(4)　$z(O(n))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(5)　$z(O(n, \boldsymbol{C}))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(6)　$z(O(m, n-m))=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$

(7)　$z(SO(m, n-m))=\begin{cases} \{E\} & n \text{ 奇数} \\ \{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2 & n \text{ 偶数} \end{cases}$

(8)　$z(U(n))=\{aE | a \in \boldsymbol{C}, |a|=1\}$.

証明　いずれも容易であるので省略した．

この書では，連結な単純線型 Lie 群をすべて書きあげようとしているのであるが，そのためには，どうしても spinor 群 $Spin(n)$ を避けて通るわけにはいかない．回転群 $SO(n)$ は compact Lie 群であるが，単連結でないため（その基本群は $\pi_1(SO(n))=\boldsymbol{Z}_2$ $(n \geqq 3)$ である（〔9〕定理59）），$SO(n)$ を 2 重に被覆する普遍被覆群が存在する筈である．この群を spinor 群 $Spin(n)$ と名付けるのである．$Spin(n)$ は compact Lie 群であるため線型 Lie 群になっている筈である（〔2〕VI章）．そこでこの $Spin(n)$ を構成し，その中心 $z(Spin(n))$ を決定しよう．定義等の詳細は〔9〕を見ていただくこととし，ここでは概略を述べるにとどめた．

spinor 群 $Spin(n)$ を構成するために Clifford 代数を定義することから始

めよう．2^n 個の元

$$1,\quad e_1,\quad \cdots, e_n,\quad e_1e_2, \cdots,\quad e_ie_j\,(i<j),\quad \cdots,\quad e_{n-1}e_n, \cdots,$$
$$e_{i_1}\cdots e_{i_k}\,(i_1<\cdots<i_k),\quad \cdots,\quad e_1e_2\cdots e_n$$

を $\boldsymbol{R}$-基底とする $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ において，この基底の間の積を次のように定義する．

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})(e_{j_1}\cdots e_{j_e})=e_{i_1}\cdots e_{i_k}e_{j_1}\cdots e_{j_e}$$

ただし，1 は積の単位元であり，さらに

$$e_i{}^2=-1,\quad e_ie_j=-e_je_i\,(i\neq j)$$

の関係をいれておく．そして，分配法則を認めると $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ に積が定義されて，$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は単位元 1 をもつ 2^n 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環になる．この $\boldsymbol{R}$-多元環 $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ を **Clifford 代数**という．

$\lambda\in\boldsymbol{R}$ を $\lambda 1\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ と同一視して

$$\boldsymbol{R}\subset C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

とみなし，さらに，$(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ を $x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ と同一視して

$$S^{n-1}\subset\boldsymbol{R}^n\subset C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

とみなしておく．ここに，S^{n-1} は $n-1$ 次元単位球面である：$S^{n-1}=\{(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n|x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2=1\}$．$\boldsymbol{R}^n$ には普通のように内積を

$$((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n))=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

で与えておく．

補題9.8　$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ において，次の(1)，(2)がなりたつ．

(1)　$x\in\boldsymbol{R}^n$ ならば $x^2=-(x, x)$ である．特に，$a\in S^{n-1}$ ならば $a^2=-1$ である．

(2)　$x, y\in\boldsymbol{R}^n$ が $(x, y)=0$ ならば $xy+yx=0$ である．

証明　(1)　$x=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ に対し，$x^2=\sum_{i,j} x_ix_je_ie_j=-\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2=-(x, x)$ である．

(2)　$x^2=-(x, x)$ の x の代りに $x+y$ とおくと，$x^2+xy+yx+y^2=(x+y)^2=-(x+y, x+y)=-(x, x)-2(x, y)-(y, y)$ より $xy+yx=-2(x, y)=0$ を得る．

$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の元 $u=\lambda_0{}^1+\sum \lambda_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ に対し長さ $|u|$ を

$$|u|=\sqrt{\lambda_0{}^2+\sum \lambda_{i_1\cdots i_k}{}^2}$$

で定義し，$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ に位相をいれる：$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)=\boldsymbol{R}^{2^n}$．また写像 t：$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\to C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ を，$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の $\boldsymbol{R}$-基底の各元に対し

$$^t(e_{i_1}\cdots e_{i_k})=e_{i_k}\cdots e_{i_1}$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-線型写像として定義する．

定義　$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ において，$a_i \in S^{n-1}$ の偶数個の積全体

$$Spin(n)=\left\{\alpha\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha=a_1\cdots a_{2m}, & a_i\in S^{n-1}\\ m=1,2,\cdots & \end{matrix}\right\}$$

は $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の積に関し群になる．実際，$a\in S^{n-1}$ に対し $1=a(-a)\in Spin(n)$ が単位元であり，$\alpha=a_1\cdots a_{2m}$ の逆元は ${}^t\alpha=a_{2m}\cdots a_1$ である．さらに，$Spin(n)$ は $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の位相から導かれた位相に関して位相群になる（さらに Lie 群になるが）．この群 $Spin(n)$ を **spinor 群**という．

補題9.9　$\alpha\in Spin(n), x\in\boldsymbol{R}^n$ に対し

$$\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^n \quad かつ \quad (\alpha x{}^t\alpha, \alpha x{}^t\alpha)=(x,x)$$

がなりたつ．

証明　まず，$a\in S^{n-1}, x\in\boldsymbol{R}^n$ ならば $ax{}^ta\in\boldsymbol{R}^n$ を示そう．実際，$x=\lambda a+y$，$\lambda\in\boldsymbol{R}, (a,y)=0$ と表わされるので，$ax{}^ta=axa=a(\lambda a+y)a=(\lambda a^2+ay)a=(-\lambda-ya)a$（補題9.8）$=-\lambda a-ya^2=-\lambda a+y\in\boldsymbol{R}^n$ となる．さて，$\alpha\in Spin(n)$ は $\alpha=a_1\cdots a_{2m}, a_i\in S^{n-1}$ と表わされるので，上述のことを繰り返すと，$\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^n$ を得る．つぎに，$(\alpha x{}^t\alpha, \alpha x{}^t\alpha)=-\alpha x{}^t\alpha\alpha x{}^t\alpha$（補題9.8）$=-\alpha xx{}^t\alpha=(x,x)\alpha{}^t\alpha=(x,x)$ となる．

定理*9.10　(1)　写像 $p: Spin(n)\to SO(n)=SO(\boldsymbol{R}^n)$,

$$p(\alpha)x=\alpha x{}^t\alpha$$

は（補題9.9）連続な全射群準同型写像であり，$\mathrm{Ker}\, p=\{1,-1\}=\boldsymbol{Z}_2$ となる．よって，位相群の同型

$$Spin(n)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(n)$$

を得る．

(2)　$Spin(n)\ (n\geqq 1)$ は compact 線型 Lie 群である．
　$Spin(n)\ (n\geqq 2)$ は連結である．
　$Spin(n)\ (n\geqq 3)$ は単連結である．

(3)　$Spin(1)=\{1,-1\}=S^0$，$Spin(2)\cong SO(2)$

証明は省略した（〔9〕定理63，64，65）．

さて，$Spin(n)$ の中心を求めよう．$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ の $\boldsymbol{R}$-部分ベクトル空間

$$C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)=\left\{u\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\,\middle|\,\begin{matrix}u=\lambda_0+\Sigma\lambda_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\cdots e_{i_k},\\ k=2,4,\cdots\end{matrix}\right\}$$

$$C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)=\left\{u\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\,\middle|\,\begin{matrix}u=\Sigma\lambda_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\cdots e_{i_k}\\ k=1,3,\cdots\end{matrix}\right\}$$

を定義する．このとき

$$C(\boldsymbol{R}_-{}^n)=C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)\oplus C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

$$C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)\subset C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n),\quad C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)\subset C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n),$$

$$C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)\subset C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n),\quad C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)\subset C^1(\boldsymbol{R}_-{}^n)$$

がなりたっている．

定理9.11　(1)　$z(Spin(2n+1))=\{1,-1\}=\boldsymbol{Z}_2$

(2)　$(z(Spin(2))=Spin(2))$

$$z(Spin(2n))=\{1,-1,e_1\cdots e_{2n},-e_1\cdots e_{2n}\}$$

$$=\begin{cases}\boldsymbol{Z}_4 & n\ \text{奇数}\\ \boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2 & n\ \text{偶数}\end{cases}\qquad (n\geqq 2)$$

証明　($Spin(2)\cong SO(2)$ (定理9.10) は可換群であるから，その中心は自分自身である)．以下，$Spin(m)$ の m は $m\geqq 3$ としておく．$\alpha\in z(Spin(m))$ とする．$e_i, e_j\ (i\neq j)$ を固定して考える．α を $\alpha\in C^0(\boldsymbol{R}_-{}^m)$ とみて

$$\alpha=\alpha^0+e_i\beta^1+e_j\gamma^1+e_ie_j\delta^0$$

と表わしておく．ここに，$\alpha^0, \delta^0\in C^0(\boldsymbol{R}_-{}^m), \beta^1, \gamma^1\in C^1(\boldsymbol{R}_-{}^m)$ で，いずれもその項に e_ie_j を含まないものとする．α の $\varepsilon=e_ie_j\in Spin(m)$ との可換性を調べると

$$e_ie_j\alpha^0-e_j\beta^1+e_i\gamma^1-\delta^0=\alpha\varepsilon=\varepsilon\alpha=e_ie_j\alpha^0+e_j\beta^1-e_i\gamma^1-\delta^0$$

となるので，$\beta^1=\gamma^1=0$ を得る．よって

$$\alpha=\alpha^0+e_ie_j\delta^0$$

となる．これが，すべての $e_i, e_j\ (i\neq j)$ についてなりたつから

$$\alpha=\lambda+\mu e_1\cdots e_m\qquad \lambda, \mu\in\boldsymbol{R}$$

となる．

(1)　$\alpha\in z(Spin(2n+1))$ ならば，$\alpha=\lambda+\mu e_1\cdots e_{2n+1}$ であったが，$\alpha\in C^0(\boldsymbol{R}_-{}^{2n+1})$ より $\mu=0$ である．よって，$\alpha=\lambda\in\boldsymbol{R}$ であるが，$1=\alpha{}^t\alpha=\lambda^2$ より，$\lambda=\pm 1$ である．

(2)　$\alpha\in z(Spin(2n))\ (n\geqq 2)$ ならば，$\alpha=\lambda+\mu e_1\cdots e_{2n}$ であった．ここで，$x\in\boldsymbol{R}^{2n}$ ならば $\alpha x{}^t\alpha\in\boldsymbol{R}^{2n}$ (補題9.9) を用いる．$x=e_{2n}$ として，

$$\begin{aligned}\alpha e_{2n}{}^t\alpha&=(\lambda+\mu e_1\cdots e_{2n})e_{2n}(\lambda+\mu e_{2n}\cdots e_1)\\&=(\lambda e_{2n}-\mu e_1\cdots e_{2n-1})(\lambda+\mu e_{2n}\cdots e_1)\\&=\lambda^2e_{2n}-\lambda\mu e_1\cdots e_{2n-1}+\lambda\mu e_{2n-1}\cdots e_1-\mu^2e_{2n}\\&=(\lambda^2-\mu^2)e_{2n}-2\lambda\mu e_1\cdots e_{2n-1}\in\boldsymbol{R}^{2n}\end{aligned}$$

となるので，$\lambda\mu=0$ を得る．さらに，$1=\alpha{}^t\alpha$ より

$$1=(\lambda+\mu e_1\cdots e_{2n})(\lambda+\mu e_{2n}\cdots e_1)=\lambda^2+\mu^2$$

を得る．以上より

$$\alpha=\pm 1,\quad \pm e_1\cdots e_{2n}$$

となる．逆に，これらの元は $Spin(2n)$ の中心の元であることが容易に確かめられる．

(i)　n が奇数のとき

$$(e_1\cdots e_{2n})^2=(-1)^{(2n-1)+\cdots+1}(-1)^{2n}=(-1)^{n(2n-1)}=-1$$

であるから，$e_1\cdots e_{2n}$ の位数は 4 である．よって，$z(Spin(2n))=\boldsymbol{Z}_4$ である．

(ii)　n が偶数のとき，

$$(e_1\cdots e_{2n})^2=(-1)^{n(2n-1)}=1$$

であるから，$\pm e_1\cdots e_{2n}$の位数は 2 である．よって，対応

$$1 \quad \leftrightarrow \quad (1,1), \qquad -1 \quad \leftrightarrow \quad (-1,1)$$

$$e_1\cdots e_{2n} \quad \leftrightarrow \quad (1,-1), \qquad -e_1\cdots e_{2n} \quad \leftrightarrow \quad (-1,-1)$$

により $z(Spin(2n))\cong\{1,-1\}\times\{1,-1\}=\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2$ である．

注意　$$Spin(4n)/\{1,-1\}\cong SO(4n)$$

はよいが，群 $Ss(4n)$ を

$$Ss(4n)=Spin(4n)/\{1,e_1\cdots e_{4n}\}$$

で定義し，**半 Spinor 群**という．$n=2$ のとき，$Ss(8)$ は $SO(8)$ に群同型になる：$Ss(8)\cong SO(8)$．しかし

$$Ss(4n)\not\cong SO(4n) \qquad n\geqq 3$$

が知られている*．また

$$Spin(4n)/\{1,-e_1\cdots e_{4n}\}\cong Ss(4n)$$

ともなっている*．

（リレー夜話）

当時大阪市立大学のトポロジーには，小松醇郎先生を中心に，工藤達二先生（以下敬称略）中岡稔，水野克彦，戸田宏，斉藤喜宥，山菅弘（若くして死去）がおり，京都大学から菅原正博，四方義啓，1時的ではあるが信州大学の斉藤素，三重大学の岡本茂，新潟大学の金子哲夫等々の参加もあって活発な研究が行なわれていました．特に，戸田氏による球面のホモトピー群の決定は脚光を浴びていました．ある日トポロジーゼミの終了後，小松先生からコーヒーに誘われて「君もホモトピーをやらないか」といわれました．私は「そうします」と返事しなかったのですが，幾何学の主流は「ホモロジー，ホモトピー」であるような気がして，その方面の勉強を始めました．ホモロジーは何とか理解できましたが，ホモトピーは難かしいという印象だけが残りました（Spectral sequence に Pontrjagin 積をいれようと頑張ったことがありましたが，Samelson のよりよい結果が出て先を越されてしまいました)．ホモトピーがうまく行かないので，大阪大学の永尾汎先生の群論のゼミに顔を出したこともありましたが，有限群論もやはり難かしということで永続きしませんでした．なお，Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P_2$ を例外群 F_4 への埋め込みに成功したのはこの苦悩時のことでした（極く最近になって小松先生にこのコーヒーの件をお話ししました所，ホモトピーに誘ったという記憶がないということでした)．

（信州大学時代24年）　昭和41年に信州大学に移りました．ホモトピーの重圧から逃れて例外群を本格的にやり出したのもこの頃からです．例外群のことなら何でも調べてやろうというわけで，例外群 G_2, F_4 の表現環を調べたりしていました．

E_6 型の compact 例外群 E_6 を構成することは私の長年の夢でした．これも先に述べました Freudenthal の論文がその発端になっています．ある時，村上先生と「Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P_2$ の共線変換群は $E_{6(-26)}$（これは E_6 型非 compact 群）であるが，この事実は実射影平面 $\boldsymbol{R}P_2$ の共線変換群は $SL(3,\boldsymbol{R})$（これは A_2 型非 compact 群）であることに類似しているので，$SL(3,\boldsymbol{R})$ から A_2 型 compact 群 $SU(3)$ を構成することを模倣すると compact E_6 群が構成できるのではないか」と話し合ったことから気にし続けていました．そのために Cayley 射影平面を複素化した空間 $\mathfrak{C}^CP_2$ を調べました．$\mathfrak{C}^CP_2$ は射影幾何学には絶対ならないのですが，射影幾何学まがいのことをやろうと試みました．すなわち，$\mathfrak{C}^CP_2$ に 2 次曲線を定義して，$\mathfrak{C}^CP_2$ の共線変換群でこの 2 次曲線を不変にする部分群として E_6 を構成し

（p. 110 へつづく）

10. 低次元 Lie 群

低次元の線型 Lie 群の間にいくつかの群同型が存在する．これについて述べよう．

定義　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，V を K-ベクトル空間とする．V の任意の 2 つの元 x, y に対し，K の元 (x, y) が一意に定まり，次の 3 つの条件

(1)　$(x, y)=(y, x)$

(2)　$(x+x', y)=(x, y)+(x', y) \qquad x, x', y \in V$

(3)　$(\lambda x, y)=\lambda(x, y) \qquad \lambda \in K$

をみたすとき，(　，　) を V 上の**対称な内積**（または V 上の **2 次形式**）という．さらに，次の条件

(4)　すべての $y \in V$ に対し $(x, y)=0$ ならば $x=0$ となる

がなりたつとき，内積 (　，　) は**非退化**であるという．対称な内積 (　，　) をもつ K-ベクトル空間 V の元 x に対し

$$N(x)=(x, x)$$

とおき，$N(x)$ を x の**ノルム**という．内積とノルムの間には

$$(x, y)=\frac{1}{2}(N(x+y)-N(x)-N(y))$$

の関係がある．

n 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V に非退化な対称な内積 (　，　) が与えられ，V のある $\boldsymbol{R}$-基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関して，V の元 x, y を $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $x_i, y_i \in \boldsymbol{R}$ と表わすとき，

$$N(x)=-x_1{}^2-\cdots-x_m{}^2+x_{m+1}{}^2+\cdots+x_n{}^2$$

$$(x, y)=-x_1 y_1-\cdots-x_m y_m+x_{m+1} y_{m+1}+\cdots+x_n y_n$$

となるとき，V は $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$ **型 Euclid 空間**（または **Minkowski 空間**）といい，$V \simeq \boldsymbol{R}^{m, n-m}$ で表わす．（この m は V の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の選び方によらず，V に対して一意に定まる（線型代数学の Sylvester の定理））．$m=$

0 ならば，V を n 次元 **Euclid 空間**といい，$V\simeq \boldsymbol{R}^n$ で表わす．

例10.1　split 複素数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{C}'$ は，ノルム $N(a)=a\overline{a}$ に関して $(1,1)$ 型 Euclid 空間である：

$$\boldsymbol{C}'\simeq \boldsymbol{R}^{1,1}$$

実際，$a=x+y\boldsymbol{i}'(x,y\in\boldsymbol{R})$ に対し，$N(a)=a\overline{a}=(x+y\boldsymbol{i}')(x-y\boldsymbol{i}')=x^2-y^2$ となるからである．

例10.2　split 四元数全体のつくる $\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H}'$ は，ノルム $N(a)=a\overline{a}$ に関して $(2,2)$ 型 Euclid 空間である：

$$\boldsymbol{H}'\simeq \boldsymbol{R}^{2,2}$$

実際，$a=x+y\boldsymbol{i}'+s\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}'(x,y,s,t\in\boldsymbol{R})$ に対し，$N(a)=x^2-y^2+s^2-t^2$ となるからである．

$K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ とし，V を K-ベクトル空間とするとき，K-線型同型写像 α：$V\to V$ 全体を $\mathrm{Iso}_K(V)$ で表わす．$\mathrm{Iso}_K(V)$ は写像の合成の積に関し群になる．($\mathrm{Iso}_K(V)$ は $GL(V)$ で表わす方が普通である)．さて，V を n 次元 Euclid 空間（または $(m,n-m)$ 型 Euclid 空間）とするとき

$$\begin{aligned} O(V)&=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V)\mid(\alpha x,\alpha y)=(x,y)\}\\ &=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V)\mid N(\alpha x)=N(x)\}\end{aligned}$$

は $\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(V)$ の部分群になる．V の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を，$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in V$ のノルムが $N(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2$（または $N(x)=-\sum_{i=1}^{m}x_i{}^2+\sum_{j=m+1}^{n}x_j{}^2$）となるように選んで，$\alpha\in O(V)$ に対し

$$\alpha e_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i\quad j=1,\cdots,n$$

とおいて行列 $A=\begin{pmatrix} & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}i\in M(n,\boldsymbol{R})$ をつくると $A\in O(n)$（または $A\in O(m,n-m)$）となる．そして，対応 $\alpha\to A$ により，群同型

$$O(V)\cong O(n)\quad （または\ O(V)\cong O(m,n-m)）$$

を得る．以下，α と A を同一視して $O(V)=O(n)$（または $O(V)=O(m,n-m)$）と書く（位相もこめて）．また

$$SO(V)=\{\alpha\in O(V)\mid\det\alpha=1\}$$

とおくと，$SO(V)=SO(n)$（または $SO(V)=SO(m,n-m)$）となる．

同様なことが，非退化な対称な内積をもつ n 次元 $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間 V に対

してもいえる．群 $O(V)$ を

$$O(V)=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(V)|N(\alpha x)=N(x)\}$$

で定義する． V に $\boldsymbol{C}$-基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in V$ のノルムが

$$N(x)=x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2$$

となるように選び，$\alpha\in O(V)$ をこの $\boldsymbol{C}$-基底に関して行列 A で表わし，対応 $\alpha\to A$ で同一視して

$$O(V)=O(n,\boldsymbol{C})$$

とみなす．また，$SO(V)=\{\alpha\in O(V)|\det\alpha=1\}=SO(n,\boldsymbol{C})$ である．($\boldsymbol{C}^{m,n-m}$ も定義できるが，殆んど意味がない． $\boldsymbol{C}$-基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ に対して $N(x)=-\sum_{i=1}^{m}x_i{}^2+\sum_{j=m+1}^{n}x_j{}^2$ となるならば， $\boldsymbol{C}$-基底を $\{\boldsymbol{i}e_1,\cdots,\boldsymbol{i}e_m,e_{m+1},\cdots,e_n\}$ にとりかえると $N(x)=x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2$ となるからである（定理3.7参照)）．

定理10.3　(1)　$SO(1,1)\cong GL(1,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^*$,　$O(1,1)_0\cong\boldsymbol{R}^+=\{x\in\boldsymbol{R}|x>0\}$

(2)　$SO^*(2)=SO(2)\cong U(1)$

証明　(1)　$SO(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\in M(2,\boldsymbol{R})\middle|a^2-b^2=1\right\}$ となるので，写像 f : $SO(1,1)\to\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{R}-\{0\}$,

$$f\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=a+b$$

が群同型を与えている．f の逆写像 g : $\boldsymbol{R}^*\to SO(1,1)$ は

$$g(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+x^{-1} & x-x^{-1}\\ x-x^{-1} & x+x^{-1}\end{pmatrix}$$

で与えられる．$O(1,1)_0=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\in M(2,\boldsymbol{R})\middle|a^2-b^2=1,\ a\geqq 1\right\}$ となるので，同じ写像 f を用いて群同型が与えられる．

(2)　$A\in SO^*(2)$ ならば，$JA=\bar{A}J$ より $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, $a,b\in\boldsymbol{C}$ となるが，さらに ${}^tAA=E$, $\det A=1$ の条件があると，$a,b\in\boldsymbol{R}$ が導かれて

$$SO^*(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in M(2,\boldsymbol{R})\middle|a^2+b^2=1\right\}$$

となる．これは $SO(2)$ と一致している．また，$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in SO(2)$ に $a+b\boldsymbol{i}\in U(1)$ を対応させることにより，$SO(2)\cong U(1)$ を得る．

定理10.4　(1)　$SU^*(2)=SU(2)\cong Sp(1)$,　$Sp(1)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(3)$

(2)　$SU(1,1)\cong SL(2,\boldsymbol{R})=Sp(1,\boldsymbol{R})$,　$SL(2,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,1)_0$

(3)　$SL(2, C)=Sp(1, C)$, $SL(2, C)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(3, C) \cong O(3, 1)_0$

証明　(1)
$$SU(2)=\{A \in M(2, \boldsymbol{C}) \mid A^*A=E, \det A=1\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M(2, C) \,\middle|\, |a|^2+|b|^2=1\right\}$$

である．一方，$A \in SU^*(2)$ ならば，$JA=\bar{A}J$ より $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a, b \in \boldsymbol{C}$ となるので，$\det A=1$ と併せて $SU(2)$ と一致している．つぎに，写像 $k: Sp(1) \to SU(2)$

$$k(a+b\boldsymbol{j})=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad a, b \in \boldsymbol{C}, |a|^2+|b|^2=1$$

が群同型を与えている．

$\boldsymbol{H}_0$ を純虚四元数全体のつくる 3 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とする：

$$\boldsymbol{H}_0=\{x \in \boldsymbol{H} \mid \bar{x}=-x\}$$

$\boldsymbol{H}_0$ は長さ $|x|=\sqrt{x\bar{x}}$ をもつ 3 次元 Euclid 空間である：$\boldsymbol{H}_0 \cong \boldsymbol{R}^3$.

$$SO(3)=SO(\boldsymbol{H}_0)$$

とする．さて，写像 $f: Sp(1) \to SO(3)$ を

$$f(p)x=px\bar{p} \qquad x \in \boldsymbol{H}_0$$

で定義する．f は well-defined である．実際，$\overline{px\bar{p}}=p\bar{x}\bar{p}=-px\bar{p}$ より $px\bar{p} \in \boldsymbol{H}_0$ であり，さらに，$|px\bar{p}|=|p||x||\bar{p}|=|x|$ より $f(p) \in O(3)=O(\boldsymbol{H}_0)$ となる．f は連続である．それは，$p=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k} \in Sp(1)$, $p_i \in \boldsymbol{R}$ とおいて $f(p)$ を $\boldsymbol{H}_0$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を用いて行列で表わすと（後に実際に書いておいた），その各成分が p_0, p_1, p_2, p_3 の多項式になるからである．$Sp(1)$ は連結である（定理5.4）から $f(Sp(1))$ は $O(3)$ の単位元連結成分 $SO(3)$（定理5.11）に含まれる．よって，写像 $f: Sp(1) \to SO(3)$ が定義された．明らかに f は群準同型写像である．

$$\operatorname{Ker} f=\{1, -1\}=\boldsymbol{Z}_2$$

である．実際，$p \in Sp(1)$ が $f(p)=1$ とすると，$px\bar{p}=x$, $x \in \boldsymbol{H}_0$ である．$px=xp$ がすべての $x \in \boldsymbol{H}_0$ でなりたつから，$x=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とすれば $p \in \boldsymbol{R}$ が分かる．さらに $|p|=1$ であるから $p=\pm 1$ である．$SO(3)$ は連結であり

$$\dim Sp(1)=3=\dim SO(3)$$

（定理4.12）であるから，命題8.7より $Sp(1)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(3)$ を得る．念のため，$p=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k} \in Sp(1)$ として $f(p) \in SO(3)$ を $\boldsymbol{H}_0$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を用いて行列表示しておく．

$$f(p)=\begin{pmatrix} 2(p_0^2+p_1^2)-1 & 2(p_1p_2-p_0p_3) & 2(p_1p_3+p_0p_2) \\ 2(p_1p_2+p_0p_3) & 2(p_0^2+p_2^2)-1 & 2(p_2p_3-p_0p_1) \\ 2(p_1p_3-p_0p_2) & 2(p_2p_3+p_0p_1) & 2(p_0^2+p_3^2)-1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$Sp(1,\boldsymbol{R})=\{A\in M(2,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tAJA=J\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M(2,\boldsymbol{R})\,\middle|\,ad-bc=1\right\}$$

となるので，これは $SL(2,\boldsymbol{R})$ と一致している．つぎに

$$SU(1,1)=\{A\in M(2,\boldsymbol{C})\,|\,A^*I_1A=I_1,\ \det A=1\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\in M(2,\boldsymbol{C})\,\middle|\,|a|^2-|b|^2=1\right\}$$

となる．したがって，写像 k'：$Sp(1,{}'\boldsymbol{H})\to SU(1,1)$,

$$k'(a+b\boldsymbol{j}')=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\quad a,b\in\boldsymbol{C},\ |a|^2-|b|^2=1$$

が群同型を与えている．しかるに，${}'\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{H}'$ に $\boldsymbol{R}$-多元環同型である：${}'\boldsymbol{H}\cong\boldsymbol{H}'$ (例1.7) から $Sp(1,{}'\boldsymbol{H})\cong Sp(1,\boldsymbol{H}')$ であり，さらに，$Sp(1,\boldsymbol{H}')\cong Sp(1,\boldsymbol{R})$ (定理3.6) である．以上より，$SU(1,1)\cong Sp(1,\boldsymbol{R})$ である．

$\boldsymbol{H}_0'$ を純虚 split 四元数全体のつくる 3 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とする：

$$\boldsymbol{H}_0'=\{x\in\boldsymbol{H}'\,|\,\overline{x}=-x\}$$

$\boldsymbol{H}_0'$ はノルム $N(x)=x\overline{x}$ をもつ (2, 1) 型 Euclid 空間である：$\boldsymbol{H}_0'\simeq\boldsymbol{R}^{2,1}$．実際，$x=x_1\boldsymbol{i}'+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}'(x_i\in\boldsymbol{R})$ に対して

$$N(x)=-x_1^2+x_2^2-x_3^2$$

となるからである．

$$O(2,1)=O(\boldsymbol{H}_0')$$

とする．さて，写像 f：$Sp(1,\boldsymbol{H}')\to O(2,1)_0$ を

$$f(p)x=px\overline{p}\qquad x\in\boldsymbol{H}_0'$$

で定義する．f が定義できることは，$Sp(1,\boldsymbol{H}')\cong Sp(1,\boldsymbol{R})$ が連結である (定理6.11) ことに注意すると，(1)の f：$Sp(1)\to SO(3)$ のときと同様である．f は群準同型写像であり，$\mathrm{Ker}\,f=\{1,-1\}=\boldsymbol{Z}_2$ である．当然 $O(2,1)_0$ は連結であり，$\dim Sp(1,\boldsymbol{H}')=3=\dim O(2,1)_0$ であるから，命題8.7より $Sp(1,\boldsymbol{H}')/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,1)_0$ を得る．そして，上述にもあったように $Sp(1,\boldsymbol{H}')\cong Sp(1,\boldsymbol{R})=SL(2,\boldsymbol{R})$ である．

(3) $Sp(1,C)=SL(2,C)$ はよい．$SL(2,C)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(3,C)$ は，(1)において $\boldsymbol{H}$ の代わりに $\boldsymbol{H}^C$ を用いればよい．すなわち

$$SO(3,C)=SO((\boldsymbol{H}^C)_0)$$

とするとき，写像 $f: Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \to SO(3, C)$,

$$f(p)x = px\overline{p} \qquad x \in (\boldsymbol{H}^C)_0$$

が群同型 $Sp(1, \boldsymbol{H}^C)/Z_2 \cong SO(3, C)$ を誘導している．そして $Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \cong Sp(1, C)$（定理6.11）$= SL(2, C)$ である．

最後に $SL(2, \boldsymbol{C})/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(3, 1)_0$ を示そう．

$$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C}) = \{X \in M(2, \boldsymbol{C}) | X^* = X\}$$

とおく．$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ の元 X は

$$X = \begin{pmatrix} \xi & x \\ \overline{x} & \eta \end{pmatrix} \qquad \xi, \eta \in \boldsymbol{R}, x \in \boldsymbol{C}$$

の形をしているので，$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ は 4 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間である．$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ の元 X のノルムを

$$N(X) = \det X = \xi\eta - x\overline{x}$$

で与える．$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{R}$-基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}\right\}$ を選ぶと分かるように，$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ は $(3, 1)$ 型 Euclid 空間である：$\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{R}^{3,1}$.

$$O(3, 1) = O(\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C}))$$

とおく．写像 $f: SL(2, \boldsymbol{C}) \to O(3, 1)_0$ を

$$f(A)X = AXA^* \qquad X \in \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$$

で定義する．f は well-defined である．実際，$AXA^* \in \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ であり，さらに，$N(f(A)X) = \det(AXA^*) = \det A \det X \det A^* = \det X = N(X)$ より $f(A) \in O(3, 1) = O(\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C}))$ となる．f は連続であり，$SL(2, \boldsymbol{C})$ は連結である（定理6.11）から，$f(SL(2, \boldsymbol{C})) \subset O(3, 1)_0$ となる．よって，写像 $f: SL(2, \boldsymbol{C}) \to O(3, 1)_0$ が定義された．明らかに f は群準同型写像である．

$$\mathrm{Ker}\, f = \{E, -E\} = \boldsymbol{Z}_2$$

である．実際，$A \in SL(2, \boldsymbol{C})$ が $f(A) = 1$ とすると，$AXA^* = X$ がすべての $X \in \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ に対してなりたつ．$X = E$ とおくと $AA^* = E$ となり，$AX = XA$ となる．$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと分かるように $A = aE$, $a \in \boldsymbol{C}$ となる．$\det A = 1$ の条件より $a^2 = 1$ である．よって，$A = \pm E$ となる．

$$\dim SL(2, \boldsymbol{C}) = 6 = \dim O(3, 1)_0$$

（定理4.12）であるから，命題8.7より $SL(2, \boldsymbol{C})/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(3, 1)_0$ を得る．

注意　$SL(2, C)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(3, C)$, $SL(2, \boldsymbol{C})/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(3, 1)_0$ では意味する所が少し異なるかもしれない．前者は複素 Lie 群として同型であるが，後者はそ

うではない．もちろん，実 Lie 群としては皆同型となっている．

定理10.4の証明でみたように，群 $SO(3)$，$O(2,1)_0$，$SO(3,C)$ は四元数多元環 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}'$，$\boldsymbol{H}^C$ に関係があったが，さらに密接な関係にあるので説明しよう．

定義　$\boldsymbol{R}$-多元環 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}'$，（または C-多元環 $\boldsymbol{H}^C$）の $\boldsymbol{R}$（または C）-自己同型写像全体

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H})=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{H})|\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)\}$$
$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}')=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(H')|\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)\}$$
$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}^C)=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\boldsymbol{H}^C)|\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)\}$$

は写像の合成の積に関し群になる．この群をそれぞれ $\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}',\boldsymbol{H}^C$ の**自己同型群**という．

補題10.5　$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}),\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}'),\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}^C)$ はそれぞれ $O(\boldsymbol{H}_0),O(\boldsymbol{H}'_0)$，$O((\boldsymbol{H}^C)_0)$ の部分群である：

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H})\subset O(3),\quad \mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}')\subset O(2,1),\quad \mathrm{Aut}(\boldsymbol{H}^C)\subset O(3,C)$$

証明　$\alpha\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H})$ とする．$\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)$ において，$x=y=1$ とおくと $\alpha(1)=1$ がまず分かる．つぎに，$\alpha(\boldsymbol{i})\alpha(\boldsymbol{i})=\alpha(\boldsymbol{ii})=\alpha(-1)=-1$ より $\overline{\alpha(\boldsymbol{i})}=-\alpha(\boldsymbol{i})=\alpha(\overline{\boldsymbol{i}})$ を得る．(一般に $xx=-1$ ならば $N(x)=x\overline{x}=1$ となるので，$xx=-1$ の両辺に $\overline{x}$ を掛けると $x=-\overline{x}$ を得る)．同様に $\overline{\alpha(\boldsymbol{j})}=\alpha(\overline{\boldsymbol{j}})$，$\overline{\alpha(\boldsymbol{k})}=\alpha(\overline{\boldsymbol{k}})$ を得る．以上より，結局

$$\overline{\alpha(x)}=\alpha(\overline{x})\qquad x\in\boldsymbol{H}$$

を得る．さて，$N(\alpha(x))=\alpha(x)\overline{\alpha(x)}=\alpha(x)\alpha(\overline{x})=\alpha(x\overline{x})=\alpha(N(x))=N(x)$ となり，$\alpha\in O(3)$ である．以上で，$\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H})\subset O(3)$ が証明された．

$\alpha\in\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H}')$ に対しては，若干の注意が必要である．$\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)$ において $y=1$ とおくと，$\alpha(x)=\alpha(x)\alpha(1)$ となる．これより，$\alpha(1)$ はすべての $x\in\boldsymbol{H}'$ に対して $x=x\alpha(1)$ となり $\alpha(1)=1$ を得る．つぎに，$\alpha(\boldsymbol{i}')\alpha(\boldsymbol{i}')=\alpha(\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}')=\alpha(1)=1$ となる．$x=\alpha(\boldsymbol{i}')$ とおく．$xx=1$ より $N(x)^2=1$ となる．$N(x)=1$ とすると，$xx=1$ の両辺に $\overline{x}$ をかけて $x=\overline{x}$ を得る．これは $\alpha(\boldsymbol{i}')$ が実数であることを意味し，矛盾である．したがって，$N(x)=-1$ であり，$xx=1$ の両辺に $\overline{x}$ をかけて $x=-\overline{x}$ となる．よって，$\overline{\alpha(\boldsymbol{i}')}=\alpha(\boldsymbol{i}')=\alpha(\overline{\boldsymbol{i}'})$ を得る．$\overline{\alpha(\boldsymbol{k}')}=\alpha(\overline{\boldsymbol{k}'})$ も同様である．また $\alpha(\boldsymbol{j})\alpha(\boldsymbol{j})=-1$ となる．$y=\alpha(\boldsymbol{j})$ とおく．$yy=-1$ より $N(y)^2=1$ となる．$N(y)=-1$ とすると $yy=-1$ の両辺に $\overline{y}$ をかけて $\overline{y}=y$ となり矛盾する．したがって，$N(y)=1$ でありこのときは $y=-\overline{y}$ となる．よって，$\overline{\alpha(\boldsymbol{j})}=-\alpha(\boldsymbol{j})=\alpha(\overline{\boldsymbol{j}})$ を得る．以上より，結局

$$\overline{\alpha(x)}=\alpha(\overline{x})\qquad x\in\boldsymbol{H}'$$

を得る．これより $N(\alpha(x))=N(x)$ となり，$\alpha\in O(2,1)$ である．以上で Aut $(\boldsymbol{H}')\subset O(2,1)$ が証明された．Aut $(\boldsymbol{H}^C)$ についても Aut $(\boldsymbol{H}')$ と同様である．

定理10.6　$\alpha\in$ Aut $(\boldsymbol{H})$（または Aut $(\boldsymbol{H}')$，Aut $(\boldsymbol{H}^C)$）は，逆元をもつ $p\in\boldsymbol{H}$（または $\boldsymbol{H}',\boldsymbol{H}^C$）を用いて

$$\alpha(x)=pxp^{-1}\qquad x\in\boldsymbol{H}(\text{または } \boldsymbol{H}',\boldsymbol{H}^C)$$

と表わされる．そして

$$\text{Aut}\,(\boldsymbol{H})=SO(3),\quad \text{Aut}\,(\boldsymbol{H}')=SO(2,1),\quad \text{Aut}\,(\boldsymbol{H}^C)=SO(3,C)$$

がなりたつ．

証明　定理10.4の写像 $f: Sp(1)\to SO(3)$

$$f(p)x=px\overline{p}\qquad x\in\boldsymbol{H}$$

（$p1\overline{p}=1$ であるから $x\in\boldsymbol{H}_0$ を $x\in\boldsymbol{H}$ にしてもよい）において，$f(p)$ は明らかに $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$-自己同型写像である：$f(p)\in$ Aut $(\boldsymbol{H})$. f が全射であることは，$\alpha\in SO(3)$ は，ある $p\in Sp(1)$ を用いて

$$\alpha(x)=pxp^{-1}\qquad x\in\boldsymbol{H}$$

で表わされることを意味しており，かつ $SO(3)\subset$ Aut $(\boldsymbol{H})$ を示している．Aut $(\boldsymbol{H})\subset SO(3)$ を示そう．Aut $(\boldsymbol{H})\subset O(3)$ は既に示した（補題10.5）ので，$\alpha\in$ Aut $(\boldsymbol{H})$ ならば $\det\alpha=1$ を示せばよい．$\det\alpha=-1$ とする．$\gamma=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ として $\beta=\gamma\alpha$ とおく．このとき，$\beta\in SO(3)\subset$ Aut $(\boldsymbol{H})$ となるので，$\gamma=\beta\alpha^{-1}\in$ Aut $(\boldsymbol{H})$ となる．すると，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{ij}=(-\gamma(\boldsymbol{i}))(\gamma(\boldsymbol{j}))=-\gamma(\boldsymbol{ij})=-\gamma(\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{k}$ のなり矛盾する．以上で，Aut $(\boldsymbol{H})=SO(3)$ が証明された．

Aut $(\boldsymbol{H}')$ についても，定理10.4の写像 $f: Sp(1,\boldsymbol{H}')\to O(2,1)_0$,

$$f(p)=px\overline{p}\qquad x\in\boldsymbol{H}'$$

を用いる．明らかに $f(p)\in$ Aut $(\boldsymbol{H}')$ である．f が全射であることは，$\alpha\in O(2,1)_0$ はある $p\in Sp(1,\boldsymbol{H}')$ を用いて

$$\alpha(x)=px\overline{p}\qquad x\in\boldsymbol{H}'$$

の表わされることを意味しており，かつ $O(2,1)_0\subset$ Aut $(\boldsymbol{H}')$ を示している．写像 $\tilde{\boldsymbol{i}}': \boldsymbol{H}'\to\boldsymbol{H}'$ を

$$\tilde{\boldsymbol{i}}'(x)=\boldsymbol{i}'x\boldsymbol{i}'\qquad x\in\boldsymbol{H}'$$

で定義すると，$\tilde{\boldsymbol{i}}'\in$ Aut $(\boldsymbol{H}')$ であり，$\tilde{\boldsymbol{i}}'$ を $\boldsymbol{H}_0'$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}'\}$ を用いて行列表示すると $I'=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$ となる．$I'\in SO(2,1)$, $I'\notin O(2,1)_0$ であ

る．以上で，$SO(2,1)=O(2,1)_0\cup I'O(2,1)_0$(定理6.12)$\subset \mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H}')$ が示され，かつ，$\alpha\in SO(2,1)$ は $p\in Sp(1,\boldsymbol{H}')$ を用いて

$$\alpha(x)=pxp^{-1}\quad \text{または}\quad (\boldsymbol{i}'p)x(\boldsymbol{i}'p)^{-1}\qquad x\in \boldsymbol{H}'$$

で表わされることも分かった．逆の包含式 $\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H}')\subset SO(2,1)$ の証明は $\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H})$ のときと同様である．

$\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H}^C)$ については，$SO(3,C)$ が連結であるので，$\mathrm{Aut}\,(\boldsymbol{H})$ と同様な状態にあり，$\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H}^C$ に置きかえるだけでよいので，証明を省略する．

注意　定理10.6の前半は，代数学の Noether-Skolem の定理「M を中心的単純 K-多元環とすれば，M の K-自己同型写像は内部自己同型写像である」(命題1.9，1.16参照）を知る者には自明であるかもしれない．

定理10.7　(1)　$(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(4)$

(2)　$(SL(2,\boldsymbol{R})\times SL(2,\boldsymbol{R}))/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,2)_0$

(3)　$(Sp(1)\times SL(2,\boldsymbol{R}))/\boldsymbol{Z}_2\cong SO^*(4)$

(4)　$(SL(2,C)\times SL(2,C))/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(4,C)$

証明　(1)　$\boldsymbol{H}$ は長さ $|x|$ をもつ 4 次元 Euclid 空間である：$\boldsymbol{H}\simeq \boldsymbol{R}^4$ から，$SO(4)=SO(\boldsymbol{H})$ とする．写像 $f:Sp(1)\times Sp(1)\to SO(4)$ を

$$f(p,q)x=px\overline{q}\qquad x\in \boldsymbol{H}$$

で定義する．f は well-defined である．実際，$|px\overline{q}|=|p||x||\overline{q}|=|x|$ より $f(p,q)\in O(4)=O(\boldsymbol{H})$ となる．f は連続であり（後に $f(p,q)$ の行列形を書いておいた)．$Sp(1)\times Sp(1)$ は連結であるから，$f(Sp(1)\times Sp(1))$ は $O(4)$ の単位元連結成分 $SO(4)$ に含まれる．よって，写像 $f:Sp(1)\times Sp(1)\to SO(4)$ が定義された．明らかに f は群準同型写像である．

$$\mathrm{Ker}\,f=\{(1,1),(-1,-1)\}=\boldsymbol{Z}_2$$

である．実際，$p,q\in Sp(1)$ が $f(p,q)=1$ とすると，$px\overline{q}=x$，すなわち $px=xq$ がすべての $x\in \boldsymbol{H}$ でなりたつ．$x=1$ とおくと $p=q$ となるので，あとは $x=\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とおくなどして $p=q=\pm 1$ を得る．$SO(4)$ は連結であり，

$$\dim\,(Sp(1)\times Sp(1))=3+3=6=\dim\,SO(4)$$

であるから，命題8.7より $(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(4)$ を得る．念のため，$p=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}$, $q=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}\in Sp(1)$ として，$f(p,q)\in SO(4)$ を $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を用いて行列表示しておく．

$$f(p,q)=\begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

($f: Sp(1)\times Sp(1)\to SO(4)$ が全射であったが，これを定理10.6を用いて証明してみよう．$\alpha\in SO(4)$ に対し，$\alpha(1)=p$ とおくと $p\in Sp(1)$ である．写像 $L_p: \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ を $L_p(x)=px$ で定義する．このとき，$L_p\in SO(4)$ となる．$\sigma=L_p{}^{-1}\alpha$ とおくと，$\sigma(1)=1$ となるので $\sigma\in SO(3)$ である．よって，定理10.6より，$q\in Sp(1)$ が存在して

$$\sigma(x)=qx\overline{q} \qquad x\in\boldsymbol{H}$$

となる．さて，$f(pq,q)=\alpha$ である．実際，$f(pq,q)x=pqx\overline{q}=L_p\sigma(x)=\alpha(x)$, $x\in\boldsymbol{H}$ である．以上で f の全射が示された)．

(2)　$SL(2,\boldsymbol{R})\cong Sp(1,\boldsymbol{H}')$ である（定理3.6）から，$SL(2,\boldsymbol{R})$ の代わりに $Sp(1,\boldsymbol{H}')$ を用いる．$\boldsymbol{H}'$ はノルム $N(x)=x\overline{x}$ をもつ(2, 2)型 Euclid 空間であった：$\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{R}^{2,2}$ (例10.2)．$SO(2,2)=SO(\boldsymbol{H}')$ とする．写像 $f: Sp(1,\boldsymbol{H}')\times Sp(1,\boldsymbol{H}')\to O(2,2)_0$ を

$$f(p,q)x=px\overline{q} \qquad x\in\boldsymbol{H}'$$

で定義する．f は連続な群準同型写像であり，$Sp(1,\boldsymbol{H}')$ は連結であるから f は well-defined である．$\mathrm{Ker}\,f=\{(1,1),(-1,-1)\}=\boldsymbol{Z}_2$ であり，$\dim(Sp(1,\boldsymbol{H}')\times Sp(1,\boldsymbol{H}'))=6=\dim O(2,2)_0$ であるから，命題8.7より $(Sp(1,\boldsymbol{H}')\times Sp(1,\boldsymbol{H}'))/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,2)_0$ を得る．念のため，$p=p_0+p_1\boldsymbol{i}'+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}'$, $q=q_0+q_1\boldsymbol{i}'+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}'\in Sp(1,\boldsymbol{H}')$ として，$f(p,q)\in O(2,2)_0$ を $\boldsymbol{H}'$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{1,\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}',\boldsymbol{k}'\}$ を用いて行列表示しておく．

$$f(p,q)=\begin{pmatrix} p_0 & -p_2 & p_1 & p_3 \\ p_2 & p_0 & -p_3 & p_1 \\ p_1 & -p_3 & p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 & -p_2 & p_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 & q_2 & -q_1 & -q_3 \\ -q_2 & q_0 & q_3 & q_1 \\ -q_1 & q_3 & q_0 & q_2 \\ -q_3 & q_1 & -q_2 & q_0 \end{pmatrix}$$

(3)　$\{x+yi\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+ti\boldsymbol{k}\,|\,x,y,s,t\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{H}^C$ は $\boldsymbol{H}'$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型であるから，これを $\boldsymbol{H}'$ と同一視する．$Sp(1,\boldsymbol{H}')\cong Sp(1,\boldsymbol{R})=SL(2,\boldsymbol{R})$ であるから，$SL(2,\boldsymbol{R})$ の代わりに $Sp(1,\boldsymbol{H}')$ を用いる．

$$O^*(4)=\{A\in M(4,C)\,|\,JA=(\tau A)J,\ {}^tAA=E\}$$
$$SO^*(4)=\{A\in O^*(4)\,|\,\det A=1\}$$

とおく（$\boldsymbol{C}$ の代わりに C を用いた）とき，$SO^*(4)$ は $O^*(4)$ の単位元連結成分であることが容易に分かる(定理5.11参照)．また，$\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\boldsymbol{H}^C)$ を $\boldsymbol{H}^C$ の

C-基底 $\{1, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\}$ を用いて行列 A で表示し，α と A を同一視して

$$\mathrm{Iso}_C(\boldsymbol{H}^C) = GL(4, C)$$

とみなしておく，なお $\boldsymbol{H}^C$ にノルムを $N(x) = x\bar{x}$ で与えておく．さて，写像 $f : Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}') \to SO^*(4)$ を

$$f(p, q)x = px\bar{q} \qquad x \in \boldsymbol{H}^C$$

で定義する．f が well-defined であることを示さなければならない．実際，$A = f(p, q)$ とおくとき，${}^tAA = E$ となることは，$N(Ax) = N(px\bar{q}) = (px\bar{q})\overline{(px\bar{q})} = x\bar{x} = N(x)$ より分かることである．$JA = (\tau A)J$ は実際に計算して確かめてみよう．それは $p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k} \in Sp(1)$，$q = q_0 + q_1 i\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3 i\boldsymbol{k} \in Sp(1, \boldsymbol{H}')$ に対し

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & -p_2 & -p_1 & -p_3 \\ p_2 & p_0 & p_3 & -p_1 \\ p_1 & -p_3 & p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 & -p_2 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_2 & iq_1 & iq_3 \\ -q_2 & q_0 & iq_3 & -iq_1 \\ -iq_1 & -iq_3 & q_0 & q_2 \\ -iq_3 & iq_1 & -q_2 & q_0 \end{pmatrix}$$

となることより分かる．よって $A \in O^*(4)$ である．(以上のことは，後で示す定理11.10(3)に命題8.2(1)を用いても分かることである)．f は連続であり，$Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}')$ は連結であるから，$f(Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}')) \subset SO^*(4)$ となり，写像 $f : Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}') \to O^*(4)_0 = SO^*(4)$ が定義された．明らかに f は群準同型写像であり，$\mathrm{Ker}\, f = \{(1, 1), (-1, -1)\} = \boldsymbol{Z}_2$，$\dim(Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}')) = 6 = \dim SO^*(4)$ となるから，命題8.7より $(Sp(1) \times Sp(1, \boldsymbol{H}'))/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO^*(4)$ を得る．

(4)　$SL(2, C) \cong Sp(1, \boldsymbol{H}^C)$ (定理3.6) に注意して，(1)の $\boldsymbol{H}$ の代わりに $\boldsymbol{H}^C$ を用いればよい．すなわち，$SO(4, C) = SO(\boldsymbol{H}^C)$ とするとき，写像 $f : Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \to SO(4, C)$

$$f(p, q)x = px\bar{q} \qquad x \in \boldsymbol{H}^C$$

が群同型 $(Sp(1, \boldsymbol{H}^C) \times Sp(1, \boldsymbol{H}^C))/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(4, C)$ を誘導している．

定理10.8　$SO(4)$ は $Sp(1)$ と $SO(3)$ の半直積であり，$SO(4, C)$ は $Sp(1, C)$ と $SO(3, C)$ の半直積である：

$$SO(4) \cong Sp(1) \cdot SO(3),$$
$$SO(4, C) \cong Sp(1, C) \cdot SO(3, C)$$

証明　$SO(4) = SO(\boldsymbol{H})$，$SO(3) = SO(\boldsymbol{H}_0) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{H})$ (定理10.6) とする．直積空間 $Sp(1) \times SO(3)$ において，積を

$$(p, \sigma)(q, \tau) = (p(\sigma(q)), \sigma\tau)$$

で定義すると群になる．実際，群の結合法則は

$$
\begin{aligned}
(p,\sigma)((q,\tau)(r,\rho)) &= (p,\sigma)(q(\tau(r)),\tau\rho)\\
&= (p(\sigma(q(\tau(r)))),\sigma(\tau\rho)) = (p(\sigma(q)\sigma\tau(r)),(\sigma\tau)\rho)\\
&= (p(\sigma(q)),\sigma\tau)(r,\rho) = ((p,\sigma)(q,\tau))(r,\rho)
\end{aligned}
$$

であり，$(1,1)$ は単位元であり，(p,σ) の逆元は $(\overline{\sigma^{-1}p},\sigma^{-1})$ である．この群を $Sp(1)\cdot SO(3)$ で表わすことにする．$Sp(1)\cdot SO(3)$ において，$Sp(1)=Sp(1)\times\{1\}$ は正規部分群であり，$SO(3)=\{1\}\times SO(3)$ は部分群であって，$Sp(1)\cdot SO(3)$ は $Sp(1)$ と $SO(3)$ の半直積になっている．さらに，$Sp(1)\cdot SO(3)$ は位相群である．さて，写像 $f: Sp(1)\cdot SO(3)\to SO(4)$ を

$$f(p,\sigma)=L_p\sigma$$

で定義する（L_p の定義は定理10.7にある）．f は連続である．また，f は群準同型写像である．実際，$x\in \boldsymbol{H}$ に対し

$$
\begin{aligned}
f(p,\sigma)f(q,\tau)x &= L_p\sigma L_q\tau(x) = p\sigma(q(\tau(x)))\\
&= p(\sigma(q))(\sigma\tau(x)) = (L_{p\sigma(q)}\sigma\tau)x\\
&= f(p\sigma(q),\sigma\tau)x = f((p,\sigma)(q,\tau))x
\end{aligned}
$$

となるからである．写像 $g: SO(4)\to Sp(1)\cdot SO(3)$ を

$$g(\alpha)=(\alpha(1),L_{\alpha(1)}{}^{-1}\alpha)$$

で定義すると，g は連続で，$gf=1$，$fg=1$ となっている．以上で，$SO(4)\cong Sp(1)\cdot SO(3)$ が証明された．$SO(4,C)$ についても同様である．

次の定理10.10の前に行列 X の $\mathrm{tr}(X)$ について少し注意しておく．$K=\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}',\boldsymbol{H}^C$ とし，$x\in K$ に対し $\mathrm{R}(x)=\dfrac{1}{2}(x+\overline{x})$ とおくと，$\mathrm{R}(x)\in\boldsymbol{R}$ または C であり，$\mathrm{R}(xy)=\mathrm{R}(yx)$，$x,y\in K$ がなりたつ．

補題10.9　$K=\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}',\boldsymbol{H}^C$ とし，$X\in M(n,K)$ は $X^*=X$ であるとする．このとき，$A\in M(n,K)$ に対し

$$\mathrm{tr}(AXA^*)=\mathrm{R}(\mathrm{tr}(A^*AX))$$

がなりたつ．特に，$A\in Sp(n,K)$ ならば $\mathrm{tr}(AXA^*)=\mathrm{tr}(X)$ となる．

証明　$X^*=X$ ならば $(AXA^*)^*=AXA^*$，$\mathrm{tr}(X)=\mathrm{R}(\mathrm{tr}(X))$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AXA^*) &= \mathrm{R}(\mathrm{tr}(AXA^*)) = \mathrm{R}\Big(\sum_{i,j,k} a_{ij}x_{jk}\overline{a}_{ik}\Big)\\
&= \mathrm{R}\Big(\sum_{i,j,k}\overline{a}_{ik}a_{ij}x_{jk}\Big) = \mathrm{R}(\mathrm{tr}(A^*AX)) = \mathrm{tr}(A^*AX)
\end{aligned}
$$

を得る．（$X=\Big(x_{ij}\Big)$，$A=\Big(a_{ij}\Big)$ とおいて計算した）．

定理10.10　(1)　$Sp(2)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(5)$

(2)　$Sp(1,1)/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(4,1)_0$

(3)　$Sp(2,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(2,3)_0$

(4)　$Sp(2,C)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(5,C)$

証明　(1)　$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0 = \{X \in M(2,\boldsymbol{H}) \mid X^* = X, \mathrm{tr}(X) = 0\}$ とおく．$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ の元 X は

$$X = \begin{pmatrix} \xi & x \\ \overline{x} & -\xi \end{pmatrix} \qquad \xi \in \boldsymbol{R}, x \in \boldsymbol{H}$$

の形をしているので，$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ は 5 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間である．$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ の元 X のノルムを

$$N(X) = -\det X = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2) = \xi^2 + x\overline{x}$$

で与えると，$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ は 5 次元 Euclid 空間になる．

$$SO(5) = SO(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0)$$

とおく．写像 $f: Sp(2) \to SO(5)$ を

$$f(A)X = AXA^* \qquad X \in \mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$$

で定義する．f は well-defined である．実際，$(AXA^*)^* = AXA^*$, $\mathrm{tr}(AXA^*) = \mathrm{tr}(X)$(補題10.9)$=0$ より $AXA^* \in \mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ である．さらに，$2N(AXA^*) = \mathrm{tr}((AXA^*)^2) = \mathrm{tr}(AX^2A^*) = \mathrm{tr}(X^2)$(補題10.9)$= 2N(X)$ より $f(A) \in O(5) = O(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0)$ となる．f は連続であり，$Sp(2)$ は連結である（定理5.4）から，$f(Sp(2)) \subset SO(5)$ となる．よって，写像 $f: Sp(2) \to SO(5)$ が定義された．明らかに f は群準同型写像である．

$$\mathrm{Ker}\, f = \{E, -E\} = \boldsymbol{Z}_2$$

である．実際，$A \in Sp(2)$ が，$f(A) = E$ とすると，$AXA^* = X$，すなわち $AX = XA$ がすべての $X \in \mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ でなりたつ．$X = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{j} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & \end{pmatrix}$ とおくと，$A = \pm E$ がわかる．

$$\dim Sp(2) = 10 = \dim SO(5)$$

（定理4.12）であるから，今題8.7より $Sp(2)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(5)$ を得る．

(2)　$$\mathfrak{J}_1(2,\boldsymbol{H})_0 = \{X \in M(2,\boldsymbol{H}) \mid X^* = I_1XI_1, \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

の元 $X = \begin{pmatrix} \xi & x \\ -\overline{x} & -\xi \end{pmatrix}$ のノルムを

$$N(X) = -\det X = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2) = \xi^2 - x\overline{x}$$

で与えると，$\mathfrak{J}_1(2, \boldsymbol{H})_0$ は $(4,1)$ 型 Euclid 空間になる．$O(4,1)=O(\mathfrak{J}_1(2,\boldsymbol{H})_0)$ とおき，写像 $f: Sp(1,1)\to O(4,1)_0$ を

$$f(A)X=I_1AI_1XA^* \qquad X\in\mathfrak{J}_1(2,\boldsymbol{H})_0$$

で定義する．f は well-defined である．実際，$(I_1AI_1XA^*)^*=I_1(I_1AI_1XA^*)I_1$ はよく，$\mathrm{tr}(I_1AI_1XA^*)=\mathrm{R}(\mathrm{tr}(I_1AI_1XA^*))=\mathrm{R}(\mathrm{tr}(A^*I_1AI_1X))$(補題10.9参照)$=\mathrm{R}(\mathrm{tr}(X))=0$ となる．さらに $2N(f(A)X)=2N(I_1AI_1XA^*)=\mathrm{tr}(I_1AI_1XA^*I_1AI_1XA^*)=\mathrm{tr}(I_1AI_1X^2A^*)=\mathrm{tr}(A^*I_1AI_1X^2)$(補題10.9参照)$=\mathrm{tr}(X^2)=2N(X)$ となる．よって，$f(A)\in O(4,1)$ である．そして f は連続であり，$Sp(1,1)$ は連結であるから $f(Sp(1,1))\subset O(4,1)_0$ となり，f が定義される．f は群準同型写像であり，$\mathrm{Ker}\, f=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$ で，$\dim Sp(1,1)=10=\dim O(4,1)_0$ であるから，命題8.7より $Sp(1,1)/\boldsymbol{Z}_2\cong O(4,1)_0$ を得る．

(3)　$Sp(2,\boldsymbol{H}')\cong Sp(2,\boldsymbol{R})$ である（定理3.6）から，$Sp(2,\boldsymbol{R})$ の代わりに $Sp(2,\boldsymbol{H}')$ を用いる．

$$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}')_0=\{X\in M(2,\boldsymbol{H}')\,|\,X^*=X,\mathrm{tr}(X)=0\}$$

の元 $X=\begin{pmatrix}\xi & x\\ \overline{x} & -\xi\end{pmatrix}$ のノルムを

$$N(X)=-\det X=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2)=\xi^2+x\overline{x}$$

で与えると，$\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}')_0$ は $(2,3)$ 型 Euclid 空間になる．$O(2,3)=O(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}')_0)$ とおき，写像 $f: Sp(2,\boldsymbol{H}')\to O(2,3)_0$ を

$$f(A)X=AXA^* \qquad X\in\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}')_0$$

で定義すると，f は well-defined である．$\mathrm{Ker}\, f=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$, $\dim Sp(2,\boldsymbol{H}')=10=\dim O(2,3)_0$ であるから，命題8.7より，$Sp(2,\boldsymbol{H}')/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,3)_0$ を得る．

(4)　(1)において $\boldsymbol{H}$ の代わりに $\boldsymbol{H}^C$ とすればよい．すなわち，写像 $f: Sp(2,\boldsymbol{H}^C)\to SO(5,C)=SO(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}^C)_0)$,

$$f(A)X=AXA^* \qquad X\in\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H}^C)_0$$

が群の同型 $Sp(2,\boldsymbol{H}^C)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(5,C)$ を誘導している．そして，$Sp(2,\boldsymbol{H}^C)\cong Sp(2,C)$ である（定理3.6）．

定理10.11　(1)　$SU(4)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(6)$

(2)　$SU(2,2)/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,4)_0$

(3)　$SL(4,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}_2\cong O(3,3)_0$

(4)　$SL(4,C)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(6,C)$

証明　(1)

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \xi & -b & a \\ -\xi & 0 & -\overline{a} & -\overline{b} \\ b & \overline{a} & 0 & -\overline{\xi} \\ -a & \overline{b} & \overline{\xi} & 0 \end{pmatrix} \middle| \xi, a, b \in \boldsymbol{C} \right\}$$

とおくと，$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ は 6 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間である．$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の上記のような元 X のノルムを

$$N(X)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(XX^*)=\xi\overline{\xi}+a\overline{a}+b\overline{b}$$

で与えると，$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ は 6 次元 Euclid 空間になる．$SO(6)=SO(\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}))$ とおく．写像 $f: SU(4)\to SO(6)$ を

$$f(A)X=AX{}^tA \qquad X\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$$

で定義する．f の well-difined 性を示さなければならない．

主張 1　$A\in SU(4)$，$X\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$　ならば　$AX{}^tA\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$

これを示すために次の主張 2 を用意する．

主張 2　$D\in\mathfrak{su}(4)$, $X\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$　ならば　$DX+X{}^tD\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$

主張 2 ならば主張 1 がなりたつ．実際，$A\in SU(4)$ は $A=\exp D$, $D\in su(4)$ と表わせる（定理5.5）ので，

$$\begin{aligned} AX{}^tA &= (\exp D)X{}^t(\exp D) \\ &= \left(E+D+\frac{D^2}{2!}+\frac{D^3}{3!}+\cdots\right)X\left(E+{}^tD+\frac{{}^tD^2}{2!}+\frac{{}^tD^3}{3!}+\cdots\right) \\ &= X+(DX+X{}^tD)+\frac{1}{2!}(D^2X+2DX{}^tD+X{}^tD^2) \\ &\qquad +\frac{1}{3!}(D^3X+3D^2X{}^tD+3DX{}^tD^2+X{}^tD^3)+\cdots \end{aligned}$$

$X_1=DX+X{}^tD$, $X_2=DX_1+X_1{}^tD$, $X_3=DX_2+X_2{}^tD$, $\cdots$ とおくと，主張 2 より帰納的に $X_i\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ となるので

$$=X+X_1+\frac{X_2}{2!}+\frac{X_3}{3!}+\cdots\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$$

となる．($\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ は $M(4, \boldsymbol{C})$ の閉集合であることに注意)．

主張 2 の証明　直接に計算することにより確かめられる．実際には，$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{R}$-基底

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & i \\ & & -i & \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \boldsymbol{i} \\ & & \boldsymbol{i} & \\ \hline & -\boldsymbol{i} & & \\ -\boldsymbol{i} & & & \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} & & -\boldsymbol{i} & \\ & & & \boldsymbol{i} \\ \hline \boldsymbol{i} & & & \\ & -\boldsymbol{i} & & \end{array}\right)$$

をとり，$D\in\mathfrak{su}(4)$ とこの $\boldsymbol{R}$-基底の各元に対し $DX+X{}^tD$ を計算して $\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の元になることを示すことになるだろうが，この計算結果は後に（定理11.12）書いておいた．

以上で主張 1 が示された．さらに $4N(f(A)X)=4N(AX{}^tA)=\mathrm{tr}((AX{}^tA)(AX{}^tA)^*)=\mathrm{tr}(AXX^*A^*)=\mathrm{tr}(A^*AXX^*)=\mathrm{tr}(XX^*)=4N(X)$ より $f(A)\in O(6)=O(\tilde{\mathfrak{J}}(C))$ となる．f は連続であり，$SU(4)$ は連結である（定理5.4）から $f(SU(4))\subset SO(6)$ となる．よって，写像 $f:SU(4)\to SO(6)$ が定義された．明らかに f は群準同型写像である．

$$\mathrm{Ker}\, f=\{E,\ -E\}=\boldsymbol{Z}_2$$

である．実際，$A\in SU(4)$ が $f(A)=1$ とすると $AX{}^tA=X$ がすべての $X\in\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ に対してなりたつ．$X=\boldsymbol{i}J$ とおくと $AJ{}^tA=J$ となるので，$A\in Sp(2,\boldsymbol{C})\cap U(4)=k(Sp(2))$（定理3.8）より $A=k(B)$，$B\in Sp(2)$ と表わすことができる．主張 2 の証明にある $\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{R}$-基底のうち，初めの 1 つを除いた 5 つの元から生成される $\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{R}$-部分ベクトル空間は $k(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0)J$ と一致していることに注意すると，$AX{}^tA=X$ の条件より，$k(B)k(Y)J{}^tk(B)=k(Y)J$，$Y\in\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$，$k(B)k(Y)k(B)^*J=k(Y)J$，さらに $k(BYB^*)=k(Y)$，$BYB^*=Y$，すなわち

$$BY=YB\quad \text{がすべての } Y\in\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0 \text{ でなりたつ}$$

ことによる．よって，定理10.10のようにして $B=\pm E$ を得る．したがって $A=\pm E$ となる．$SO(6)$ は連結で

$$\dim SU(4)=15=\dim SO(6)$$

である（定理4.12）から，命題8.7より $SU(4)/\boldsymbol{Z}_2\cong SO(6)$ を得る．

(2)
$$\tilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \xi & -b & a \\ -\xi & 0 & \overline{a} & \overline{b} \\ b & -\overline{a} & 0 & -\overline{\xi} \\ -a & -\overline{b} & \overline{\xi} & 0 \end{pmatrix}\middle|\ \xi,\ a,\ b\in\boldsymbol{C}\right\}$$

にノルムを

$$N(X)=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(I_2XI_2X^*)=-\xi\overline{\xi}+a\overline{a}+b\overline{b}$$

で与えると，$\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$ は $(2,4)$ 型 Euclid 空間になる．$O(2,4)=O(\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C}))$ とおく．写像 $f: SU(2,2)\to O(2,4)$ を

$$f(A)X=AX{}^tA \qquad X\in\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$$

で定義する．f の well-defined 性を示さなければならない．

主張 1　$A\in SU(2,2)$，$X\in\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$　ならば　$AX{}^tA\in\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$

これを示すためには，$SU(2,2)$ は連結である（定理6.11）から，$SU(2,2)$ の元 A は $A=\exp D_1\cdots\exp D_m$，$D_i\in\mathfrak{su}(2,2)$ と表わされる（命題7.5）ので，次の主張 2 を示せばよい．

主張 2　$D\in\mathfrak{su}(2,2)$，$X\in\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$　ならば　$DX+X{}^tD\in\widetilde{\mathfrak{J}}_2(\boldsymbol{C})$

この主張 2 の証明は実際計算することにより確かめられる．これで主張 1 がなりたつことが分かった．さらに $4N(f(A)X)=4N(AX{}^tA)=-\operatorname{tr}(I_2(AX{}^tA)I_2(AX{}^tA)^*)=-\operatorname{tr}(I_2AX{}^tAI_2{}^tA^*X^*A^*)=-\operatorname{tr}(I_2AXI_2X^*A^*)=-\operatorname{tr}(A^*I_2AXI_2X^*)=-\operatorname{tr}(I_2XI_2X^*)=4N(X)$ より $f(A)\in O(2,4)$ となる．f は連続であり，$SU(2,2)$ は連結である（定理6.11）であるから $f(SU(2,2))\subset O(2,4)_0$ となり，写像 f が定義された．f は群準同型写像であり，

$$\operatorname{Ker} f=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$$

$$\dim SU(2,2)=15=\dim O(2,4)_0$$

であるから，命題8.7より $SU(2,2)/\boldsymbol{Z}_2\cong O(2,4)_0$ を得る．

(3)　$SU(4,\boldsymbol{C}')\cong SL(4,\boldsymbol{R})$ である（定理3.3）から，$SL(4,\boldsymbol{R})$ の代わりに $SU(4,\boldsymbol{C}')$ を用いる．(1)の $\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$ の代わりに $\boldsymbol{C}'$ に置きかえた $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}')$ を考える．$\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}')$ にノルムを

$$N(X)=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(XX^*)=\xi\overline{\xi}+a\overline{a}+b\overline{b}$$

で与えると，$\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}')$ は $(3,3)$ 型 Euclid 空間になる．$O(3,3)=O(\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}'))$ とおく．このとき，$f: SU(4,\boldsymbol{C}')\to O(3,3)_0$,

$$f(A)X=AX{}^tA \qquad X\in\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}')$$

は群同型 $SU(4,\boldsymbol{C}')/\boldsymbol{Z}_2\cong O(3,3)_0$ を誘導している．その証明は(1)，(2)と同様である．

(4)　$SU(4,\boldsymbol{C}^C)\cong SL(4,C)$ である（定理3.3）から，$SL(4,C)$ の代わりに $SU(4,\boldsymbol{C}^C)$ を用いる．6 次元 C-ベクトル空間 $\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}^C)$ を考え，ノルムを

$$N(X)=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(XX^*)=\xi\overline{\xi}+a\overline{a}+b\overline{b}$$

で与える．$SO(6, C)=SO(\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}^C))$ とおく．このとき，写像 $f : SU(4, \boldsymbol{C}^C) \to SO(6, C)$,

$$f(A)X = AX{}^tA \qquad X \in \tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}^C)$$

が群同型 $SU(4, \boldsymbol{C}^C)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO(6, C)$ を与えている．

以上の結果（定理10.4，10.7，10.10，10.11）のうち，compact 群の場合を取り出して次の定理にまとめておこう．

定理10.12　次の可換な図形を得る．

$$\begin{array}{ccccccc}
Sp(1) & \xrightarrow{i_1} & Sp(1)\times Sp(1) & \xrightarrow{i_2} & Sp(2) & \xrightarrow{i_3} & SU(4) \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow \\
SO(3) & \xrightarrow{j_1} & SO(4) & \xrightarrow{j_2} & SO(5) & \xrightarrow{j_3} & SO(6)
\end{array}$$

ここに

$$i_1 : Sp(1) \to Sp(1)\times Sp(1) \qquad i_1(p) = (p, p)$$

$$i_2 : Sp(1)\times Sp(1) \to Sp(2) \qquad i_2(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$i_3 = k : Sp(2) \to SU(4) \qquad k\Big(\big(a + b\boldsymbol{j}\big)\Big) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right)$$

で，いずれも単射群準同型写像である．また

$$j_1' : \boldsymbol{H}_0 \to \boldsymbol{H} \qquad j_1'(x) = x$$

$$j_2' : \boldsymbol{H} \to \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{H})_0 \qquad j_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \bar{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$j_3' : \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{H})_0 \to \tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}) \qquad j_3'(X) = k(X)J$$

で定義すると，j_1'，j_2'，j_3' は単射 $\boldsymbol{R}$-線型写像となるので

$$\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H} \subset \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{H})_0 \subset \tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$$

とみなすことができる．したがって

$$SO(\boldsymbol{H}_0) \subset SO(\boldsymbol{H}) \subset SO(\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{H})_0) \subset SO(\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}))$$

すなわち

$$SO(3) \subset SO(4) \subset SO(5) \subset SO(6)$$

とみなすことができ，j_1, j_2, j_3 はその包含写像である．

$$f_1 : Sp(1) \to SO(3) \qquad f_1(p)x = px\bar{p}, \quad x \in \boldsymbol{H}_0$$

$$f_2 : Sp(1)\times Sp(1) \to SO(4) \qquad f_2(p, q)x = px\bar{q}, \quad x \in \boldsymbol{H}$$

$$f_3 : Sp(2) \to SO(5) \qquad f_3(A)X = AXA^*, \quad X \in \mathfrak{J}(2, \boldsymbol{H})_0$$

$$f_4 : SU(4) \to SO(6) \qquad f_4(A)X = AX{}^tA, \quad X \in \tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$$

であり，いずれも全射群準同型写像で，Ker $f_i = \boldsymbol{Z}_2$，$i=1,2,3,4$ である．したがって

$$Sp(1) \cong Spin(3), \quad Sp(1) \times Sp(1) \cong Spin(4),$$
$$Sp(2) \cong Spin(5), \quad SU(4) \cong Spin(6)$$

であるといえる．

ようとしました．$\mathfrak{C}^C P_2$ 上で非ユークリッド幾何学を展開しようとしたわけです．この方法を繰返し attack しましたが，その度に失敗しました．それが突如成巧したのが今から10年余り前のことでした．それは射影幾何学を用いるということから離れて代数的に処理すればよいことに気付いたのです．しかし，その思考の根底にやはり射影幾何学が付き纏っています．今から振り返ってみますと，E_6 型 Hermite 対称空間 $E_6/(U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4)\simeq\mathfrak{C}^C P_2$ を考えていたことになっていました．この compact E_6 群を見つけた時も私の思考の中に Catastrophy 現象が起っていました．12月25日の夜，松本の自宅の2階の凍て付いた部屋の炬燵の中で突然気付いたもので，不思議な気がします．E_6 群に続いて例外群 E_7，E_8 を構成することにしましたが，それには大学院学生であった今井孝夫（現三菱電気コントロールソフトウェア株式会社），保倉理美（現横浜市立大学）の協力は貴重でした．ああでもない，こうでもないと日々討議したのが忘れられません．

今から15年程前，京都大学数理研の島田信夫先生のお勧めにより，台湾の淡江文理学院の客員教授として一年間行かせて頂きました．この一年間私は全く free でした．雑用が全く無く，テレビも新聞も無かったのですが，何も無いということは非常に貴重ですばらしいことです．おいしい紹興酒を飲みながら数学を考えていると何かが生れて来ようというものです．実際，G_2，F_4 型非 compact 群の極大 compact 群を具体的に実現したのはこの時です．現在非 compact 例外群 G の対合自己同型写像 σ とその不動点部分群 G^σ の実現を完成しましたが，その始まりは台湾の free の時間にあったと思われます．優秀な人は何処にいてもどんどん仕事が出来るでしょうが，そうでない人が行き詰まったときには環境を変えることお勧めしたい気がします．

非 compact 例外群を調べるとき，本書にある split 複素数のつくる多元環 $\boldsymbol{C}'$，split 四元数のつくる多元環 $\boldsymbol{H}'$，さらに split Cayley 代数 $\mathfrak{C}'$ の考え方が大そう役立ちます．詳しくは I. Yokota, Realizations of involutions σ and G^σ of exceptional linear Lie groups, part I, $G=G_2$, F_4 and E_6, part II, $G=E_7$, part III, $G=E_8$, Tsukuba Math. J. 1990-1991 を見て下さい．

最後になりましたが，かつて大学の私のゼミの学生であった者が中心となって，Cayley 代数，例外群を愛する者の会と称して土曜日の3時に集まってくれています．山崎善俊(よくできるよい人であったが死去)，宮坂隆，

(p. 140 へつづく)

11. Lie 環の複素化と単純複素 Lie 環

実行列 $X \in M(n, \boldsymbol{R})$ を調べるには，それを一旦複素行列 $X \in M(n, \boldsymbol{C})$ とみなして考察すると都合がよかった（特に固有値問題を取り扱うときはそうであった）ように，実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ も複素 Lie 環 $\mathfrak{g}^C$ との関係のもとに調べることになる.

定義 $\mathfrak{g}$ を $\boldsymbol{R}$-Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間としての複素化 $\mathfrak{g}^C$ において，積を

$$[X+iY, X'+iY'] = ([X, X']-[Y, Y'])+i([X, Y']+[Y, X'])$$

$(X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g})$ で定義すると，$\mathfrak{g}^C$ は C-Lie 環になる. この C-Lie 環 $\mathfrak{g}^C$ を $\mathfrak{g}$ の**複素化**といい，逆に $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}^C$ の**実形式**という. もう少し一般に，$\mathfrak{g}$ を $\boldsymbol{R}$-Lie 環，$\tilde{\mathfrak{g}}$ を C-Lie 環とするとき，$\mathfrak{g}$ の複素化 C-Lie 環 $\mathfrak{g}^C$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ と C-Lie 環として同型ならば，$\mathfrak{g}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の**実形式**という.

以下に，いくつかの Lie 環の複素化について述べるのであるが，それらは定理3.3，3.6，3.7に対応するものであり，したがって自明であるといえる. しかし，その証明を再び与えておいた.

定理11.1 (1) $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})^C \cong \mathfrak{u}(n)^C \cong \mathfrak{u}(m, n-m)^C \cong \mathfrak{gl}(n, C)$

(2) $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})^C \cong \mathfrak{su}(n)^C \cong \mathfrak{su}(m, n-m)^C \cong \mathfrak{sl}(n, C)$，$\mathfrak{su}^*(2n)^C \cong \mathfrak{sl}(2n, C)$

証明 (1) $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})^C \cong \mathfrak{gl}(n, C)$ は明らかであろう. $X \in \mathfrak{gl}(n, C)$ に対して $X - {}^tX$, $\boldsymbol{i}(X + {}^tX) \in \mathfrak{u}(n)$ であることに注意して，写像 $f : \mathfrak{gl}(n, C) \to \mathfrak{u}(n)^C$ を

$$f(X) = \frac{1}{2}(X - {}^tX) + \frac{i}{2}\boldsymbol{i}(X + {}^tX)$$

$$= \iota X - \bar{\iota}\, {}^tX \qquad\qquad \iota = \frac{1}{2}(1 + i\boldsymbol{i})$$

で定義する. f は C-Lie 環準同型写像である. 実際,

$$[f(X), f(Y)] = [\iota X - \bar{\iota}\,{}^tX, \iota Y - \bar{\iota}\,{}^tY]$$
$$= \iota[X, Y] + \bar{\iota}[{}^tX, {}^tY] = \iota[X, Y] - \bar{\iota}\,{}^t[X, Y]$$

$$=f([X,Y])$$

である．$f(X)=0$，$X\in\mathfrak{gl}(n,C)$ ならば $X=0$ となるので，f は単射である．さらに，$\dim_C \mathfrak{gl}(n,C)=n^2=\dim_C \mathfrak{u}(n)^C$ である（定理4.12）から f は全射である．以上で $\mathfrak{gl}(n,C)\cong\mathfrak{u}(n)^C$ が示された．f の逆写像 $g:\mathfrak{u}(n)^C\to\mathfrak{gl}(n,C)$ は

$$g(A+iB)=\iota(A-B\boldsymbol{i})-\overline{\iota}({}^tA+{}^tB\boldsymbol{i}) \qquad A,B\in\mathfrak{u}(n)$$

である．$\mathfrak{u}(n)^C$ の元を $P+i\boldsymbol{i}Q$，$P,Q\in M(n,C)$ で表わすとき

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q$$

でも与えられる．($\mathfrak{u}(n)$ の次元を知らなくても，f の逆写像 gを与えたので，$\mathfrak{u}(n)^C\cong\mathfrak{gl}(n,C)$ より逆に $\mathfrak{u}(n)$ の次元を知ることもできる)．同様に，f：$\mathfrak{gl}(n,C)\to\mathfrak{u}(m,n-m)^C$,

$$f(X)=\iota X-\overline{\iota}I_m{}^tXI_m \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$

が C-Lie 環同型写像であり，f の逆写像 $g:\mathfrak{u}(m,n-m)^C\to\mathfrak{gl}(n,C)$ は

$$g(A+iB)=\iota(A-B\boldsymbol{i})-\overline{\iota}I_m({}^tA+{}^tB\boldsymbol{i})I_m$$

$(A,B\in\mathfrak{u}(m,n-m))$ であり，また

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q \qquad P,Q\in M(n,C)$$

でも与えられる．

(2) $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})^C\cong\mathfrak{sl}(n,C)$ は明らかであろう．(1)と同様に，写像 $f:\mathfrak{sl}(n,C)\to\mathfrak{su}(n)^C$，$f:\mathfrak{sl}(n,C)\to\mathfrak{su}(m,n-m)^C$，$f:\mathfrak{sl}(2n,C)\to\mathfrak{su}^*(2n)^C$,

$$f(X)=\iota X-\overline{\iota}\,{}^tX$$
$$f(X)=\iota X-\overline{\iota}I_m{}^tXI_m \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$
$$f(X)=\iota X-\overline{\iota}JXJ$$

がそれぞれの C-Lie 環同型対応を与えている．f の逆写像 $g:\mathfrak{su}(n)^C\to\mathfrak{sl}(n,C)$，$g:\mathfrak{su}(m,n-m)^C\to\mathfrak{sl}(n,C)$，$g:\mathfrak{su}^*(2n)^C\to\mathfrak{sl}(n,C)$ は

$$g(A+iB)=\iota(A-B\boldsymbol{i})-\overline{\iota}({}^tA+{}^tB\boldsymbol{i}) \qquad A,B\in\mathfrak{su}(n)$$
$$g(A+iB)=\iota(A-B\boldsymbol{i})-\overline{\iota}I_m({}^tA+{}^tB\boldsymbol{i})I_m \qquad A,B\in\mathfrak{su}(m,n-m),$$
$$g(A+iB)=\iota(A-B\boldsymbol{i})-\overline{\iota}J(A+B\boldsymbol{i})J \qquad A,B\in\mathfrak{su}^*(2n)$$

で与えられる．g は $\mathfrak{su}(n)^C$, $\mathfrak{su}(m,n-m)^C$ の元を $P+i\boldsymbol{i}Q$, $P,Q\in M(n,C)$, また $\mathfrak{su}^*(2n)^C$ の元を $P+i\boldsymbol{i}Q$，$P,Q\in M(2n,C)$ で表わすとき

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=P+Q$$

でも与えられる．結果として $\mathfrak{su}(n)$ の次元が求められる．実際，$\dim\mathfrak{su}(n)=\dim_C\mathfrak{su}(n)^C=\dim_C\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})^C=\dim\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})=n^2-1$ である．$\mathfrak{su}(m,n-m)$, $\mathfrak{su}^*(2n)$ についても同様である．

定理11.2　$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})^C \cong \mathfrak{sp}(n)^C \cong \mathfrak{sp}(m, n-m)^C \cong \mathfrak{sp}(n, C)$

証明　$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})^C \cong \mathfrak{sp}(n, C)$ は明らかであろう．写像 $k: M(n, \boldsymbol{H}^C) \to MJ(2n, \boldsymbol{C}^C)$ と写像 $g: \mathfrak{u}(2n)^C \to \mathfrak{gl}(2n, C)$ の合成写像 $gk: \mathfrak{sp}(n)^C \to \mathfrak{sp}(n, C)$ が C-Lie 環の同型を与えている．実際，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sp}(n)^C &= \{Z \in \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{H}^C) \mid Z^* + Z = 0\} \\
&\xrightarrow{k} \{Y \in \mathfrak{gl}(2n, \boldsymbol{C}^C) \mid Y^* + Y = 0,\ \ JY = \overline{Y}J\} \\
&= \{Y \in \mathfrak{gl}(2n, \boldsymbol{C}^C) \mid Y^* + Y = 0,\ \ {}^tYJ + JY = 0\} \\
&= \{Y \in \mathfrak{u}(2n)^C \mid {}^tYJ + JY = 0\} \\
&\xrightarrow{g} \{X \in \mathfrak{gl}(2n, C) \mid {}^tXJ + JX = 0\} = \mathfrak{sp}(n, C)
\end{aligned}$$

である．$\mathfrak{sp}(m, n-m)^C \cong \mathfrak{sp}(n, C)$ についても，定理3.6の注意のもとに同様であるので省略する．結果として $\mathfrak{sp}(n)$ の次元が求められる．実際，$\dim \mathfrak{sp}(n) = \dim_C \mathfrak{sp}(n)^C = \dim_C \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})^C = \dim \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}) = n(2n+1)$ である．$\mathfrak{sp}(m, n-m)$ についても同様である．

定理11.3　$\mathfrak{o}(n)^C \cong \mathfrak{o}(m, n-m)^C \cong \mathfrak{o}(n, C)$,　$\mathfrak{so}^*(2n)^C \cong \mathfrak{o}(2n, C)$

証明　$\mathfrak{o}(n)^C \cong \mathfrak{o}(n, C)$ は明らかであろう．Γ_m を定理3.7の行列として，写像 $f: \mathfrak{o}(m, n-m)^C \to \mathfrak{o}(n, C)$,

$$f(X) = \Gamma_m X \Gamma_m^{-1}$$

が C-Lie 環の同型を与えている．また，写像 $f: \mathfrak{o}(2n, C) \to \mathfrak{so}^*(2n)^C$,

$$f(X) = \iota X - \bar{\iota} JXJ \qquad \iota = \frac{1}{2}(1 + i\boldsymbol{i})$$

が '-Lie 環の同型を与えている．f の逆写像 $g: \mathfrak{so}^*(2n)^C \to \mathfrak{o}(2n, C)$ は

$$g(A + iB) = \iota(A - B\boldsymbol{i}) - \bar{\iota} J(A + B\boldsymbol{i})J \qquad A, B \in \mathfrak{so}^*(2n)$$

であり，また

$$g(P + i\boldsymbol{i}Q) = P + Q \qquad P, Q \in M(2n, C)$$

でもよい．結果として $\dim \mathfrak{o}(m, n-m) = \dim \mathfrak{o}(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$, $\dim \mathfrak{so}^*(2n) = \dim \mathfrak{o}(2n) = n(2n-1)$ が得られる．

ここで Lie 環 $\mathfrak{g}$ と線型 Lie 群 G が単純であることの定義を与えよう．

定義　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ の K-部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}$ が

$$Y \in \mathfrak{g},\ \ X \in \mathfrak{a} \quad ならば \quad [Y, X] \in \mathfrak{a}$$

をみたすとき，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の **ideal** であるという．

定義　$K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ が次の 2 つの条件

(1)　$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の ideal ならば $\mathfrak{a}=\{0\}$ または $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ となる．

(2)　$\dim \mathfrak{g}>1$

をみたすとき，$\mathfrak{g}$ は**単純**であるという．

定義　G を連結な線型 Lie 群とする．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純であるとき，G は**単純**であるという．

命題11.4　$\mathfrak{g}$ を $\boldsymbol{R}$-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^C$ が単純であれば $\mathfrak{g}$ は単純である．

証明　$\mathfrak{a}$ を $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{g}$ の ideal とする．$\mathfrak{a}$ の複素化 $\mathfrak{a}^C$ は $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{g}^C$ の ideal になるので，$\mathfrak{g}^C$ の単純性より $\mathfrak{a}^C=\mathfrak{g}^C$ となる．$\dim \mathfrak{a}=\dim_C \mathfrak{a}^C=\dim_C \mathfrak{g}^C=\dim \mathfrak{g}$ より $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ を得る．よって，$\mathfrak{g}$ は単純である．

命題11.4の逆は正しくない．例えば，C-Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の実制限 $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ は単純であるが，その複素化 $(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$ は単純にならない．このことは後で（定理11.13）述べることにする．

定理11.5　$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 2)$ は単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環である．したがって

$$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}),\ \mathfrak{su}(n),\ \mathfrak{su}(m, n-m)\ (\text{以上 } n\geqq 2),\ \mathfrak{su}^*(2n)\ (n\geqq 1)$$

は単純 $\boldsymbol{R}$-Lie 環である．

証明　$\mathfrak{a}$ を $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の ideal とする．以下，記号として，

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \middle|\ \lambda_i\in \boldsymbol{C},\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=0\right\}$$

とおき，また E_{ij} は定理4.12にある行列とする．

(1)　$n=2$ のとき，$\{E_{12},\ E_{21},\ H_1=E_{11}-E_{22}\}$ は $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底である．まず

$$E_{12}\in\mathfrak{a} \text{ または } E_{21}\in\mathfrak{a}\quad \text{ならば}\quad \mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$$

を示そう．実際，$E_{12}\in\mathfrak{a}$ ならば，$H_1=[E_{12}, E_{21}]\in\mathfrak{a}$，$2E_{21}=[E_{21}, H_1]\in\mathfrak{a}$ より，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底の元 E_{12}，E_{21}，H_1 をすべてを含むことになり，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ を得る．$E_{21}\in\mathfrak{a}$ のときも同様である．さて，$\mathfrak{a}\neq\{0\}$ であるから，元

$$0\neq X=aE_{12}+bE_{21}+cH_1\in\mathfrak{a}\qquad a, b, c\in \boldsymbol{C}$$

をとる．$a\neq 0$ ならば，右から E_{21} を掛けて

$$aH_1-2cE_{21}\in\mathfrak{a}$$

左から E_{21} を掛けて

$$2aE_{21}\in\mathfrak{a}$$

となるので，$E_{21}\in\mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ となる．

$$X = bE_{21} + cH_1 \in \mathfrak{a} \qquad b \neq 0$$

のときには，H_1 を右から掛けて $2bE_{21} \in \mathfrak{a}$ となるので，$E_{21} \in \mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ となる．最後に

$$X = cH_1 \in \mathfrak{a} \qquad c \neq 0$$

のときには，E_{12} を右から掛けて $2cE_{12} \in \mathfrak{a}$ となるので，$E_{12} \in \mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ となる．以上で，$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ の単純性が証明された．

(2)　$n \geqq 3$ のとき，まず

$$\mathfrak{a} \text{ がある } E_{ij}\ (i \neq j) \text{ を含む　ならば　} \mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$$

を示そう．

$$k \neq i, j \text{ として} \qquad E_{ik} = [E_{ij}, E_{jk}] \in \mathfrak{a}$$

$$l \neq i, k \text{ として} \qquad E_{lk} = [E_{li}, E_{ik}] \in \mathfrak{a}$$

($E_{ji} \in \mathfrak{a}$ は未だ示されていないので，さらに)

$$m \neq l, k \text{ として} \qquad E_{lm} = [E_{lk}, E_{km}] \in \mathfrak{a}$$

となり，すべての $E_{lm} \in \mathfrak{a}\ (l \neq m)$ が示された．さらに

$$H_l = E_{ll} - E_{nn} = [E_{ln}, E_{nl}] \in \mathfrak{a}$$

より，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底 $\{H_i, i=1, \cdots, n-1,\ E_{lm},\ l \neq m\}$ の元をすべて含むことになり，$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ を得る．さて，$\mathfrak{a} \neq \{0\}$ であるから，元

$$0 \neq \sum_{l \neq m} a_{lm} E_{lm} + H \in \mathfrak{a} \qquad (H \in \mathfrak{h})$$

をとり，$a_{ij} \neq 0$ とする．k を $k \neq i, j$ にとり，$E_{ii} - E_{kk}$ を右から掛けて

$$\sum_{l \neq i} a_{li} E_{li} - \sum_{m \neq i} a_{im} E_{im} - \sum_{l \neq k} a_{lk} E_{lk} + \sum_{m \neq k} a_{km} E_{km} \in \mathfrak{a}$$

となる．さらに，E_{ji} を右から掛けて

$$-a_{ij} E_{ii} + \sum_{m \neq i} a_{im} E_{jm} + a_{ik} E_{jk} + a_{kj} E_{ki} \in \mathfrak{a}$$

となる．E_{jk} を右から掛けて

$$a_{ij} E_{jk} - a_{kj} E_{ji} \in \mathfrak{a}$$

となる．最後に，E_{ki} を左から掛けると

$$-a_{ij} E_{ji} \in \mathfrak{a}$$

となるので，$E_{ji} \in \mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ となる．

$$0 \neq X = H \in \mathfrak{a} \qquad (H \in \mathfrak{h})$$

とする．$0 \neq H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk}$，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ より，ある i，j に対して $\lambda_i \neq \lambda_j$ となるので，H の右から E_{ij} を掛けると

$$(\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \in \mathfrak{a}$$

となるので，$E_{ij}\in\mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$ となる．以上で $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$ $(n\geqq 2)$ の単純性が示された．$\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})$，$\mathfrak{su}(n)$，$\mathfrak{su}(m,n-m)$，$\mathfrak{su}^*(2n)$ はその複素化が $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})$，$\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C})$ となる（定理11.1）ので $n\geqq 2$ ならば（$\mathfrak{su}^*(2n)$ のときには $n\geqq 1$）単純である（命題11.4）．

定理11.6　$\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$ $(n\geqq 3,\ n\neq 4)$ は単純 C-Lie 環である．したがって

$$\mathfrak{o}(n),\quad \mathfrak{o}(m,n-m)\ (\text{以上}\ n\geqq 3,\ n\neq 4),\quad \mathfrak{so}^*(2n)\ (n\geqq 3)$$

は単純 $\boldsymbol{R}$-Lie 環である．（$\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{o}(4,\boldsymbol{C})$ は単純でない．また $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{o}(4)$，$\mathfrak{o}(2,2)$，$\mathfrak{so}^*(4)$ は単純でないが，$\mathfrak{o}(3,1)$ は単純である）．

証明　$n=3$ のとき，直接証明しても容易であるが，後で $\mathfrak{o}(3,\boldsymbol{C})\cong\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{C})$ を示す（定理11.9）ので，この単純性は定理11.5より既知としよう．$n\geqq 5$ とする．$\mathfrak{a}$ を $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$ の ideal とする．定理4.12と同じ記号 $G_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ を用いる．まず

$$\mathfrak{a}\ \text{がある}\ G_{ij}\ (i\neq j)\ \text{を含む}\quad\text{ならば}\quad \mathfrak{a}=\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$$

を示そう．

$$\begin{aligned} k\neq i,j\ \text{として}\qquad & G_{ik}=[G_{ij},G_{jk}]\in\mathfrak{a}\\ l\neq i,k\ \text{として}\qquad & G_{lk}=[G_{li},G_{ik}]\in\mathfrak{a}\\ m\neq l,k\ \text{として}\qquad & G_{lm}=[G_{lk},G_{km}]\in\mathfrak{a}\end{aligned}$$

となり，すべての $G_{lm}\in\mathfrak{a}$ $(l\neq m)$ が示された．これで $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底 $\{G_{lm},\ l<m\}$ の元をすべて含むことになり，$\mathfrak{a}=\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$ を得る．さて，$\mathfrak{a}\neq\{0\}$ であるから，元

$$0\neq X=\sum_{l<m}a_{lm}G_{lm}\in\mathfrak{a}$$

をとる．$l>m$ のとき $a_{lm}=-a_{ml}$ とおき，$\frac{1}{2}a_{lm}$ を改めて a_{lm} と書いて

$$X=\sum_{l,m}a_{lm}G_{lm}$$

と表示しておく．$a_{ij}\neq 0$ とする．$n\geqq 5$ であるので，i，j，k，s，t を相異なるものにとる．G_{ki} を右から掛けて

$$\sum_{l}a_{lk}G_{li}-\sum_{m}a_{im}G_{km}\in\mathfrak{a}$$

G_{js} を左から掛けて

$$-a_{sk}G_{ij}+a_{jk}G_{is}-a_{is}G_{ij}+a_{ij}G_{ks}\in\mathfrak{a}$$

G_{st} を右から掛けて　$a_{jk}G_{it}+a_{ij}G_{kt}\in\mathfrak{a}$，$G_{jk}$ を左から掛けて

$$a_{ij}G_{jt}\in\mathfrak{a}$$

となるので，$G_{jt}\in\mathfrak{a}$ を得る．よって，$\mathfrak{a}\in\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})$ となる．以上で $\mathfrak{o}(n,\boldsymbol{C})(n$

$\geqq 3$，$n\neq 4$) の単純性が示された．$\mathfrak{o}(n)$，$\mathfrak{o}(m, n-m)$，$\mathfrak{so}^*(2n)$ はその複素化が $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{o}(2n, \boldsymbol{C})$ となる（定理11.3）ので $n\geqq 3$，$n\geqq 4$（$\mathfrak{so}^*(2n)$ のときは $n\geqq 3$）の条件があれば単純である（命題11.4）．（$\mathfrak{o}(4, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{o}(4)$，$\mathfrak{o}(2,2)$，$\mathfrak{so}^*(4)$，$\mathfrak{o}(3,1)$ については後で（定理11.10，11.14）で述べる）．

定理11.7　$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ ($n\geqq 1$) は単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環である．したがって

$$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}),\ \mathfrak{sp}(n),\ \mathfrak{sp}(m, n-m)\quad (\text{以上 } n\geqq 1)$$

は単純 $\boldsymbol{R}$-Lie 環である．

証明　$\mathfrak{a}$ を $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の ideal とする．定理4.12と同じ記号

$$\begin{array}{ll} H_i & i=1, \cdots, n \\ U_{ij},\ \hat{U}_{ij},\ V_{ij},\ \hat{V}_{ij} & 1\leqq i<j\leqq n \\ W_i,\ \hat{W}_i & i=1, \cdots, n \end{array}$$

を用いる．これらは $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底である．そして，これらの間に

$$\begin{array}{ll} [H_i, U_{ij}]=U_{ij}, & [H_i, \hat{U}_{ij}]=-\hat{U}_{ij}, \\ [H_j, U_{ij}]=-U_{ij}, & [H_j, \hat{U}_{ij}]=\hat{U}_{ij}, \\ [H_i, V_{ij}]=V_{ij}, & [H_i, \hat{V}_{ij}]=-\hat{V}_{ij}, \\ [H_j, V_{ij}]=V_{ij}, & [H_j, \hat{V}_{ij}]=-\hat{V}_{ij}, \\ [H_i, W_i]=2W_i, & [H_i, \hat{W}_i]=-2\hat{W}_i, \\ [H_i, \text{その他}]=0 & \end{array}$$

がなりたつ．$i>j$ のとき $U_{ij}=-\hat{U}_{ji}$ の記号を用いるとき，さらに

$$[U_{ij}, U_{jk}]=U_{ik}\quad (i\neq k)\qquad [U_{ij}, U_{ji}]=H_i-H_j,$$

以下 $i<j$ として　$[V_{ij}, \hat{V}_{ij}]=H_i+H_j$

$$\begin{array}{ll} [U_{ij}, W_j]=V_{ij}, & [\hat{U}_{ij}, \hat{W}_j]=\hat{V}_{ij}, \\ [V_{ij}, \hat{W}_i]=U_{ji}, & [V_{ij}, \hat{W}_j]=U_{ij} \\ [\hat{V}_{ij}, W_i]=-U_{ij}, & [\hat{V}_{ij}, W_i]=-U_{ij}, \end{array}$$

等がなりたつ．また

$$\mathfrak{h}=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i H_i | \lambda_i\in \boldsymbol{C}\}$$

とおく．まず

$$\mathfrak{a} \text{ がある } U_{ij}\ (i\neq j) \text{ を含む　ならば　} \mathfrak{a}=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$$

を示そう．$[U_{ij}, U_{jk}]=U_{ik}$ ($i\neq k$) 等の関係があるので，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ や $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$ のときと同様にして，すべての $U_{lm}\in\mathfrak{a}$ ($l\neq m$) が分かる．さらに $V_{lm}=[U_{lm}, W_m]\in\mathfrak{a}$，$-\hat{V}_{lm}=[\hat{W}_m, \hat{U}_{lm}]\in\mathfrak{a}$ であり，$H_l+H_m=[V_{lm}, \hat{V}_{ml}]\in\mathfrak{a}$，$H_l-H_m=[U_{lm}, \hat{U}_{lm}]\in\mathfrak{a}$ より，すべての $H_l\in\mathfrak{a}$ が分かる．最後に $2W_k=[H_k, W_k]\in\mathfrak{a}$，

$-2\hat{W}_k=[H_k, \hat{W}_k]\in\mathfrak{a}$ となり，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}$-基底のすべての元を含むことになり，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ を得る．さて，$\mathfrak{a}\neq\{0\}$ であるから，元

$$0\neq X=\sum_{l\neq m}a_{lm}U_{lm}+\sum_{l<m}b_{lm}V_{lm}+\sum_{l<m}\hat{b}_{lm}\hat{V}_{lm}$$
$$+\sum_l c_l W_l+\sum_l \hat{c}_l\hat{W}_l+H\in\mathfrak{a}\qquad (H\in\mathfrak{h})$$

をとる．

(1)　$a_{ij}\neq0\,(i\neq j)$ のとき，H_i を左から掛けて

$$\sum_{m\neq i}a_{im}U_{im}-\sum_{l\neq i}a_{li}U_{li}+\sum_{i<m}b_{im}V_{im}+\sum_{l<i}b_{li}V_{li}$$
$$-\sum_{i<m}\hat{b}_{im}\hat{V}_{im}-\sum_{l<i}\hat{b}_{li}\hat{V}_{li}+2c_iW_i-2\hat{c}_i\hat{W}_i\in\mathfrak{a}$$

となり，さらに H_j を左から掛けて

$$\begin{cases}-a_{ij}U_{ij}-a_{ji}U_{ji}+b_{ij}V_{ij}+\hat{b}_{ij}\hat{V}_{ij}\in\mathfrak{a} & (i<j)\\ -a_{ij}U_{ij}-a_{ji}U_{ji}+b_{ji}V_{ji}+\hat{b}_{ji}\hat{V}_{ji}\in\mathfrak{a} & (i>j)\end{cases}$$

となる．H_i-H_j を右から掛けると，いずれの場合にも

$$2a_{ij}U_{ij}-2a_{ji}U_{ji}\in\mathfrak{a}$$

となる．さらに，H_i を左から掛けて

$$2a_{ij}U_{ij}+2a_{ji}U_{ji}\in\mathfrak{a}$$

となる．この 2 つを加えると

$$4a_{ij}U_{ij}\in\mathfrak{a}$$

より $U_{ij}\in\mathfrak{a}$ となるので，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ を得る．

(2)　$X=\sum_{l<m}b_{lm}V_{lm}+\sum_{l<m}\hat{b}_{lm}\hat{V}_{lm}+\sum_l c_lW_l+\sum_l\hat{c}_l\hat{W}_l+H\in\mathfrak{a}\qquad(H\in\mathfrak{h})$

$b_{ij}\neq0$ とする．$\hat{W}_j$ を右から掛けると

$$b_{ij}U_{ij}+\cdots\in\mathfrak{a}$$

となるので(1)に帰着される．

(2)′　(2)で $\hat{b}_{ij}\neq0$ とすると，W_i を左から掛けると，$\hat{b}_{ij}U_{ij}+\cdots\in\mathfrak{a}$ となるので(1)に帰着される．

(3)　$$X=\sum_l c_lW_l+\sum_l\hat{c}_l\hat{W}_l+H\in\mathfrak{a}\qquad(H\in\mathfrak{h})$$

$c_i\neq0\,(i<n)$ とする．$\hat{V}_{ij}$ を右から掛けて

$$c_iU_{ij}+\cdots\in\mathfrak{a}$$

となり(1)に帰着される．$c_l=0\,(l<n)$，$c_n\neq0$ のとき $\hat{V}_{nj}$ を右から掛けると $c_nU_{nj}+\cdots\in\mathfrak{a}$ となり(1)に帰着される．

(3)′　(3)において $\hat{c}_i\neq0$ のときも同様である．

(4)　$$0\neq X=H\in\mathfrak{a}\qquad(H\in\mathfrak{h})$$

のとき，$H=\sum_l \lambda_l H_l$，$\lambda_i \neq 0$ として，W_i を右から掛けると

$$2\lambda_i W_i \in \mathfrak{a}$$

となり(3)に帰着される．

以上より，いずれの場合にも $\mathfrak{a}=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ が示されて，$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の単純性が証明された．

W. Killing により

$$A_n=\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C}), \qquad B_n=\mathfrak{o}(2n+1, \boldsymbol{C}),$$
$$C_n=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \qquad D_n=\mathfrak{o}(2n, \boldsymbol{C})$$

の記号を用いる．

定理*11.8 （W. Killing-E. Cartan, **単純複素 Lie 環の分類定理**） 単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環は次のいずれかに $\boldsymbol{C}$-Lie 環として同型である．

$$A_n,\ B_n,\ C_n\ (\text{以上 } n \geqq 1),\ D_n\ (n \geqq 3) \qquad \text{古典型}$$

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8 \qquad \text{例外型}$$

ただし，$A_1=B_1=C_1$，$B_2=C_2$，$A_3=D_3$ とする．

証明は省略する（〔4〕，〔5〕，〔7〕）．この定理を Killing が証明したが少し誤りがあり，後で Cartan が訂正したといわれる．19世紀末のことである．例外型とよばれる単純 Lie 環および単純 Lie 群については，本書では全く触れていない（14章で定義だけ書いておいた）．以下の定理11.9，11.11，11.12 で $A_1=B_1=C_1$，$B_2=C_2$，$A_3=D_3$，および $D_2=A_1\oplus A_1$ を証明しよう．これらは定理10.4，10.7，10.10，10.11の結果であるといえるが，Lie 環としての同型対応を書いておいた．その前に，$D_2=A_1\oplus A_1$ があるので，Lie 環の直和の定義を与えておこう．

定義　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$ の K-ベクトル空間としての直和 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ において，積を

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)]=([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$$

で定義すると，$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ は K-Lie 環になる．この K-Lie 環 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ を $\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$ の**直和**という．

定義　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ が有限個の単純 K-Lie 環の直和に K-Lie 環として同型である：

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_m \qquad \mathfrak{g}_i \text{ は単純}$$

とき，$\mathfrak{g}$ は**半単純**であるという．

定理11.9　(1)　$\mathfrak{su}(2)\cong\mathfrak{o}(3)\cong\mathfrak{sp}(1)$

(2)　$\mathfrak{sl}(2, C) \cong \mathfrak{o}(3, C) \cong \mathfrak{sp}(1, C)$

証明　(1)　写像 $k : \mathfrak{sp}(1) \to \mathfrak{su}(2)$,

$$k(a+b\boldsymbol{j}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \qquad a, b \in \boldsymbol{C}, \quad \overline{a} = -a$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環としての同型を与えている．写像 $f : \mathfrak{sp}(1) \to \mathfrak{o}(3) = \mathfrak{o}(\boldsymbol{H}_0)$,

$$f(p)x = px - xp \qquad x \in \boldsymbol{H}_0$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環としての同型を与えている．$f(p)$ を $\boldsymbol{H}_0$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{\boldsymbol{i}, \ \boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{k}\}$ を用いて行列表示すると

$$f(p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -2p_3 & 2p_2 \\ 2p_3 & 0 & -2p_1 \\ -2p_2 & 2p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

(2)　(1)を複素化すればよい（定理11.1，11.2，11.3）．

定理11.10　(1)　$\mathfrak{o}(4) \cong \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1)$

(2)　$\mathfrak{o}(2, 2) \cong \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$

(3)　$\mathfrak{so}^*(4) \cong \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$

(4)　$\mathfrak{o}(4, C) \cong \mathfrak{sl}(2, C) \oplus \mathfrak{sl}(2, C)$

したがって，$\mathfrak{o}(4)$，$\mathfrak{o}(2, 2)$，$\mathfrak{so}^*(4)$，$\mathfrak{o}(4, C)$ は単純でない（半単純である）．

証明　(1)　写像 $f : \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \to \mathfrak{o}(4) = \mathfrak{o}(\boldsymbol{H})$,

$$f(p, q)x = px - xq \qquad x \in \boldsymbol{H}$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている．$f(p, q)$ を $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を用いて行列表示すると

$$f(p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}, q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -p_1+q_1 & -p_2+q_2 & -p_3+q_3 \\ p_1-q_1 & 0 & -p_3-q_3 & p_2+q_2 \\ p_2-q_2 & p_3+q_3 & 0 & -p_1-q_1 \\ p_3-q_3 & -p_2-q_2 & p_1+q_1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

(2)　写像 $k : \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}) \to \mathfrak{sp}(1, \boldsymbol{H}')$,

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\boldsymbol{i}' + \frac{b-c}{2}\boldsymbol{j} + \frac{b+c}{2}\boldsymbol{k}'$$

は $\boldsymbol{R}$-Lie 環同型であるので，$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$ の代りに $\mathfrak{sp}(1, \boldsymbol{H}')$ を用いる．さて，写像 $f : \mathfrak{sp}(1, \boldsymbol{H}') \oplus \mathfrak{sp}(1, \boldsymbol{H}') \to \mathfrak{o}(2, 2) = \mathfrak{o}(\boldsymbol{H}')$,

$$f(p, q)x = px - xq \qquad x \in \boldsymbol{H}'$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている．$f(p, q)$ を $\boldsymbol{H}'$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\{1, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}', \boldsymbol{k}'\}$ を用

いて行列表示すると

$$f(p_1\boldsymbol{i}'+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}',\ q_1\boldsymbol{i}'+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}')$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -p_2+q_2 & p_1-q_1 & p_3-q_3 \\ p_2-q_2 & 0 & -p_3-q_3 & p_1+q_1 \\ p_1-q_1 & -p_3-q_3 & 0 & p_2+q_2 \\ p_3-q_3 & p_1+q_1 & -p_2-q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

(3)　$\boldsymbol{H}'=\{x+yi\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+ti\boldsymbol{k} \mid x,y,s,t\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{H}^C$ とし, $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})\cong\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}')$ に注意しよう. $\mathfrak{so}^*(4)=\{X\in M(4,C)\mid {}^tX+X=0,\ JX=\overline{X}J\}$ とするとき, 写像 $f:\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H})\oplus\mathfrak{sp}(1,\boldsymbol{H}')\to\mathfrak{so}^*(4)$,

$$f(p,q)x=px-xq \qquad x\in\boldsymbol{H}^C$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている. $f(p,q)$ を $\boldsymbol{H}^C$ の C-基底 $\{1,\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\}$ を用いて行列表示すると

$$f(p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k},\ q_1i\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3i\boldsymbol{k})$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -p_2+q_2 & -p_1+iq_1 & -p_3+iq_3 \\ p_2-q_2 & 0 & p_3+iq_3 & -p_1-iq_1 \\ p_1-iq_1 & -p_3-iq_3 & 0 & p_2+q_2 \\ p_3-iq_3 & p_1+iq_1 & -p_2-q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

(4)　(1)または(2)を複素化すればよい.

定理 11.11　(1)　$\mathfrak{o}(5)\cong\mathfrak{sp}(2)$

(2)　$\mathfrak{o}(5,C)\cong\mathfrak{sp}(2,C)$

証明　(1)　写像 $f:\mathfrak{sp}(2)\to\mathfrak{o}(5)=\mathfrak{o}(\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0)$,

$$f(D)X=DX-XD \qquad X\in\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている. $f(D)$ を $\mathfrak{J}(2,\boldsymbol{H})_0$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{j} & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{k} \\ -\boldsymbol{k} & \end{pmatrix}\right\}$ を用いて行列表示すると

$$f\begin{pmatrix} p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k} & a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \\ -a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} & q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 2a_0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ -2a_0 & 0 & -p_1+q_1 & -p_2+q_2 & -p_3+q_3 \\ -2a_1 & p_1-q_1 & 0 & -p_3-q_3 & p_2+q_2 \\ -2a_2 & p_2-q_2 & p_3+q_3 & 0 & -p_1-q_1 \\ -2a_3 & p_3-q_3 & -p_2-q_2 & p_1+q_1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

(2)　(1)を複素化すればよい.

定理11.12　(1)　$\mathfrak{su}(4)\cong\mathfrak{o}(6)$

(2)　$\mathfrak{sl}(4, C)\cong\mathfrak{o}(6, C)$

証明　(1)　写像 $f:\mathfrak{su}(4)\to\mathfrak{o}(6)=\mathfrak{o}(\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C}))$,

$$f(D)X=DX+X^tD \qquad X\in\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている．$f(D)$ を $\widetilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{R}$-基底

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} & \boldsymbol{i} & & \\ -\boldsymbol{i} & & & \\ \hline & & & \boldsymbol{i} \\ & & -\boldsymbol{i} & \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \boldsymbol{i} \\ & & \boldsymbol{i} & \\ \hline & -\boldsymbol{i} & & \\ -\boldsymbol{i} & & & \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} & & -\boldsymbol{i} & \\ & & & \boldsymbol{i} \\ \hline \boldsymbol{i} & & & \\ & -\boldsymbol{i} & & \end{array}\right)$$

を用いて行列表示すると

$$f\begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{i} & a_1+b_1\boldsymbol{i} & a_2+b_2\boldsymbol{i} & a_3+b_3\boldsymbol{i} \\ -a_1+b_1\boldsymbol{i} & \lambda_2\boldsymbol{i} & a_4+b_4\boldsymbol{i} & a_5+b_5\boldsymbol{i} \\ -a_2+b_2\boldsymbol{i} & -a_4+b_4\boldsymbol{i} & \lambda_3\boldsymbol{i} & a_6+b_6\boldsymbol{i} \\ -a_3+b_3\boldsymbol{i} & -a_5+b_5\boldsymbol{i} & -a_6+b_6\boldsymbol{i} & \lambda_4\boldsymbol{i} \end{pmatrix} \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1-\lambda_2 & a_2+a_5 & b_2-b_5 & a_3-a_4 & b_3+b_4 \\ \lambda_1+\lambda_2 & 0 & b_2+b_5 & -a_2+a_5 & b_3-b_4 & -a_3-a_4 \\ -a_2-a_5 & -b_2-b_5 & 0 & -\lambda_1-\lambda_4 & -a_1+a_6 & -b_1+b_6 \\ -b_2+b_5 & a_2-a_5 & \lambda_1+\lambda_4 & 0 & -b_1-b_6 & a_1+a_6 \\ -a_3+a_4 & -b_3+b_4 & a_1-a_6 & b_1+b_6 & 0 & -\lambda_1-\lambda_3 \\ -b_3-b_4 & a_3+a_4 & b_1-b_6 & -a_1-a_6 & \lambda_1+\lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

(2)　(1)を複素化すればよい．

定理11.13　$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 2)$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 3,\ n\neq 4)$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 1)$ の実制限 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ は単純である．そして，その複素化 C-Lie 環 $(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$, $(\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$, $(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$ は単純でない（半単純である）．

証明　$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 2)$ のとき．定理11.5と同じ記号を用いるとき，H_l, $\boldsymbol{i}H_l$, $l=1, \cdots, n-1$, E_{lm}, $\boldsymbol{i}E_{lm}$, $1\leqq l<m\leqq n$ が $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ の $\boldsymbol{R}$-基底になる．$\mathfrak{a}$ を $\{0\}$ と異なる $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ の ideal とする．まず

$$\mathfrak{a}\text{ がある } E_{ij}\ (i\neq j) \text{ を含む　ならば　} \mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$$

を示そう．この証明は定理11.5と同様で，E_{ij} に E_{st}，$\boldsymbol{i}E_{st}$ を掛けると，すべての E_{lm}，$\boldsymbol{i}E_{lm}$，H_l，$\boldsymbol{i}H_l$ を $\mathfrak{a}$ が含むことになるからである．$\mathfrak{a}\neq\{0\}$ であるから，元

$$0\neq X=\sum_{l\neq m} a_{lm}E_{lm}+H\in\mathfrak{a} \qquad a_{lm}\in\boldsymbol{C},\ H\in\mathfrak{h}$$

をとる．$x+y\boldsymbol{i}=a_{ij}\neq 0\ (x, y\in\boldsymbol{R})$ とする．定理11.5と同様にして，$a_{ij}E_{ji}\in\mathfrak{a}$，すなわち

$$(x+y\boldsymbol{i})E_{ji}\in\mathfrak{a}$$

を得る．これに E_{ij}，$\boldsymbol{i}E_{ji}$ を掛けて

$$(x+y\boldsymbol{i})(E_{jj}-E_{ii})\in\mathfrak{a},\ (x\boldsymbol{i}-y)(E_{jj}-E_{ii})\in\mathfrak{a}$$

と得るが，前者に x を，後者に $-y$ を掛けて加えて

$$(x^2+y^2)(E_{jj}-E_{ii})\in\mathfrak{a}$$

より $E_{ii}-E_{jj}\in\mathfrak{a}$ となる．これに E_{ik} をかけて $E_{ji}\in\mathfrak{a}$ が分かる．よって，$\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ となる．

$$0\neq X=H\in\mathfrak{a}$$

のときも，定理11.5と同様 $(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}\in\mathfrak{a}$ となるので，上記と同じにして $E_{ij}\in\mathfrak{a}$ を得る．よって $\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ となる．以上で，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$ の単純性が示された．つぎに，C-Lie 環同型

$$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C\cong\mathfrak{sl}(n, C)\oplus\mathfrak{sl}(n, C)$$

がなりたつことを示そう．実際，$f:\mathfrak{sl}(n, C)\oplus\mathfrak{sl}(n, C)\to(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$，

$$f(A, B)=\iota A+\bar{\iota}B \qquad \iota=\frac{1}{2}(1+i\boldsymbol{i})$$

が C-Lie 環の同型を与えている．$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C$ の元は

$$P+i\boldsymbol{i}Q \qquad P, Q\in\mathfrak{sl}(n, C)$$

と一意に表わされることに注意すれば，f の逆写像 $g:(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}})^C\to\mathfrak{sl}(n, C)\oplus\mathfrak{sl}(n, C)$ は

$$g(P+i\boldsymbol{i}Q)=(P+Q, P-Q)$$

で与えられる（命題1.15）．$\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ についても同様であるので省略する．

定理11.14　$\mathfrak{o}(3, 1)\cong\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}$

したがって，$\mathfrak{o}(3, 1)$ は単純である．

証明　写像 $f:\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})_{\boldsymbol{R}}\to\mathfrak{o}(3, 1)=\mathfrak{o}(\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C}))$，

$$f(D)X=DX+XD^* \qquad X\in\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$$

が $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている．$f(D)$ を $\mathfrak{J}(2, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{R}$-基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & \end{pmatrix}\right\}$ を用いて行列表示すると

$$f\begin{pmatrix} \lambda+\mu\boldsymbol{i} & a_1+b_1\boldsymbol{i} \\ a_2+b_2\boldsymbol{i} & -\lambda-\mu\boldsymbol{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & a_1+a_2 & b_1-b_2 \\ 2\lambda & 0 & a_1-a_2 & b_1+b_2 \\ a_1+a_2 & -a_1+a_2 & 0 & -2\mu \\ b_1-b_2 & -b_1-b_2 & 2\mu & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

定理*11.15　(E. Cartan, **単純実 Lie 環の分類定理**)　単純 $\boldsymbol{R}$-Lie 環は次のいずれかに $\boldsymbol{R}$-Lie 環として同型である．

$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 2)$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 3, n\neq 4)$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 1)$

$G_2{}^C$, $F_4{}^C$, $E_6{}^C$, $E_7{}^C$, $E_8{}^C$

$\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$, $\mathfrak{su}(m, n-m)$ (以上 $n\geqq 2$), $\mathfrak{su}^*(2n)$ $(n\geqq 1)$

$\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{o}(m, n-m)$ (以上 $n\geqq 3$, $n\neq 4$), $\mathfrak{o}(3, 1)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$ $(n\geqq 3)$

$\mathfrak{sp}(n)$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R})$, $\mathfrak{sp}(m, n-m)$ (以上 $n\geqq 1$)

$\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_{2(2)}$

$\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{f}_{4(4)}$, $\mathfrak{f}_{4(-20)}$

$\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_{6(6)}$, $\mathfrak{e}_{6(2)}$, $\mathfrak{e}_{6(-14)}$, $\mathfrak{e}_{6(-26)}$

$\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_{7(7)}$, $\mathfrak{e}_{7(-5)}$, $\mathfrak{e}_{7(-25)}$,

$\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{e}_{8(8)}$, $\mathfrak{e}_{8(-24)}$

証明　は省略する (F. Gantmacher, On the classification of real simple Lie groups, Rec. Math. N.S. **5** (1939). S. Murakami, Sur la classification des algèbes de Lie réelles et simples, Osaka J. Math. **2** (1965).

12. Killing 形式

$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．元 $X\in\mathfrak{g}$ に対し，写像 $\mathrm{ad}\,X : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を

$$(\mathrm{ad}\,X)Z=[X,Z] \qquad Z\in\mathfrak{g}$$

で定義する．$\mathrm{ad}\,X : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ は明らかに K-線型写像であるが，さらに

$$\mathrm{ad}\,[X,\ Y]=\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\ Y-\mathrm{ad}\ Y\mathrm{ad}\ X$$

をみたしている．実際，

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,[X,\ Y])Z&=[[X,\ Y],Z]\\&=-[[Y,Z],X]-[[Z,X],\ Y]\\&=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]\\&=(\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Y)Z-(\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,X)Z\end{aligned}$$

となるからである．

ここで，Lie 環 $\mathfrak{g}$ を調べるのに重要な道具を提供する Killing 形式を定義しよう．

定義 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ 上の対称な 2 次形式 B を

$$B(X,\ Y)=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\ Y) \qquad X,\ Y\in\mathfrak{g}$$

で定義し，B を $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式**という．

補題12.1 $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は

$$B((\mathrm{ad}\,X)Y,Z)+B(Y,(\mathrm{ad}\,X)Z)=0 \qquad X,\ Y,Z\in\mathfrak{g}$$

をみたす．(このような性質をもつ $\mathfrak{g}$ 上の対称な 2 次形式 B は $\mathfrak{g}$-**不変**であるということにする)．

証明

$$\begin{aligned}B((\mathrm{ad}\,X)Y,Z)&=B([X,\ Y],Z)\\&=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,[X,\ Y]\mathrm{ad}\,Z)\\&=\mathrm{tr}\,((\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Y-\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,X)\mathrm{ad}\,Z)\\&=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,Z)-\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Z)\\&=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,Z\mathrm{ad}\,X)-\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,Y\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Z)\\&=\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,Y(\mathrm{ad}\,Z\mathrm{ad}\,X-\mathrm{ad}\,X\mathrm{ad}\,Z))\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,Y \mathrm{ad}\,[X, Z]) = -B(Y, [X, Z])$$
$$= -B(Y, (\mathrm{ad}\,X)Z)$$

K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{g}$-不変な対称な 2 次形式は数多く作られる．例えば，Lie 環 K-準同型写像 $\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(m, K)$ を用いて，

$$B_\rho(X, Y) = \mathrm{tr}\,((\rho X)(\rho Y))$$

で定義すると，B_ρ がそうなっている．しかし，$\mathfrak{g}$ が単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環であるときには，それらには本質的な差はない．これを示すために，表現論でよく知られた Schur の補題を用意する．

補題12.2 (I. Schur)　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とする．$\boldsymbol{C}$-線型写像 $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が

$$\text{すべての } Y \in \mathfrak{g} \text{ に対し} \quad \psi(\mathrm{ad}\,Y) = (\mathrm{ad}\,Y)\psi$$

をみたすならば，ψ は恒等写像 $1: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の定数倍になる：

$$\psi = \lambda 1 \qquad \lambda \in \boldsymbol{C}$$

証明　$\psi \neq 0$ ならば ψ が $\boldsymbol{C}$-線型同型写像になることを示そう．$\psi(\mathfrak{g}) = \{\psi(X) | X \in \mathfrak{g}\}$ は $\mathfrak{g}$ の ideal である．実際，任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$[Y, \psi(X)] = ((\mathrm{ad}\,Y)\psi)X = (\psi(\mathrm{ad}\,Y))X$$
$$= \psi([Y, X]) \in \psi(\mathfrak{g})$$

となるからである．$\psi \neq 0$ ならば $\psi(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ であるから，$\mathfrak{g}$ の単純性より $\psi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ となる．これは ψ が全射であることを示している．また，$\mathrm{Ker}\,\psi = \{X \in \mathfrak{g} | \psi(X) = 0\}$ は $\mathfrak{g}$ の ideal である．実際，$X \in \mathrm{Ker}\,\psi$ ならば，任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$\psi([Y, X]) = (\psi(\mathrm{ad}\,Y))X = ((\mathrm{ad}\,Y)\psi)X$$
$$= (\mathrm{ad}\,Y)0 = 0$$

より $[Y, X] \in \mathrm{Ker}\,\psi$ となるからである．$\psi \neq 0$ ならば $\mathrm{Ker}\,\psi \neq \mathfrak{g}$ であるから，$\mathfrak{g}$ の単純性より $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$ となる．これは ψ が単射であることを示している．以上で，ψ が $\boldsymbol{C}$-線型同型写像であることが示された．さて，ψ の固有値の 1 つを λ とする．(すなわち，$\psi - \lambda 1$ が $\boldsymbol{C}$-線型同型写像とならないような $\lambda \in \boldsymbol{C}$ をとる．(この λ の存在のために (実数体 $\boldsymbol{R}$ では駄目で) 複素数体 $\boldsymbol{C}$ である必要性がおこる)．このとき，すべての $Y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$(\psi - \lambda 1)(\mathrm{ad}\,Y) = (\mathrm{ad}\,Y)(\psi - \lambda 1)$$

がなりたつ．上記より，$\psi - \lambda 1 \neq 0$ ならば，$\psi - \lambda 1: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が $\boldsymbol{C}$-線型同型写像となり，λ が ψ の固有値であることに反する．よって，$\psi - \lambda 1 = 0$，すなわち $\psi = \lambda 1$ となり，補題が証明された．

命題12.3　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とする．B_1 を $\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$-不変な非退化な対称

2次形式とすると，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は B_1 の定数倍になる．すなわち，$\lambda\in \boldsymbol{C}$ が存在して

$$B(X, Y)=\lambda B_1(X, Y) \qquad X, Y\in\mathfrak{g}$$

がなりたつ．

証明　元 $X\in\mathfrak{g}$ に対し，写像 $\psi_X : \mathfrak{g}\to\boldsymbol{C}$ を

$$\psi_X(Y)=B(X, Y) \qquad Y\in\mathfrak{g}$$

で定義する．B_1 は非退化であるから，$B_1(X', Y)=\psi_X(Y)$ がすべての $Y\in\mathfrak{g}$ に対してなりたつような $X'\in\mathfrak{g}$ が一意に存在する．そこで，写像 $\psi : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を $\psi(X)=X'$ で定義する：

$$B_1(\psi(X), Y)=B(X, Y) \qquad X, Y\in\mathfrak{g} \tag{i}$$

ψ が $\boldsymbol{C}$-線型写像であることは容易に分かる．さらに

$$\psi(\operatorname{ad} Y)=(\operatorname{ad} Y)\psi \qquad Y\in\mathfrak{g} \tag{ii}$$

がなりたつ．実際，

$$\begin{aligned} B_1((\operatorname{ad} Y)\psi(X), Z) &= -B_1(\psi(X), (\operatorname{ad} Y)Z) && (\mathfrak{g}\text{-不変}) \\ &= -B(X, (\operatorname{ad} Y)Z)=B((\operatorname{ad} Y)X, Z) && (\text{補題 } 12.1) \\ &= B_1(\psi((\operatorname{ad} Y)X), Z) \end{aligned}$$

が，すべての $Z\in\mathfrak{g}$ に対してなりたつから，B_1 の非退化性より(ii)が導かれる．したがって，Schur の補題 12.2 より，ある $\lambda\in\boldsymbol{C}$ が存在して，$\psi=\lambda 1$ となる．これは，(i)より，$\lambda B_1(X, Y)=B(X, Y)$，$X, Y\in\mathfrak{g}$ がなりたつことを示している．

さきに，Killing 形式 B が K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ を調べるのに重要な役割を果たすといったが，その1つに次の定理がある．

定理*12.4 (E. Cartan，**Cartan の半単純判定条件**)　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とし，$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B が非退化であることである．

証明は省略する（〔5〕．なお〔7〕に短い証明がある）．

K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純ならば半単純であるから，定理12.4を認めると次の定理は明らかである．

定理12.5　$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．単純 K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は非退化である．

これから，単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の Killing 形式 B の具体形を求めようとするのであるが，これらの Killing 形式 B は定理12.5より非退化である筈である．しかし，定理12.5を用いないで，その非退化を導

くような証明を与えておいた．

補題12.6　$X \in M(n, \boldsymbol{C})$ が

$$\text{すべての } Y \in M(n, \boldsymbol{C}) \text{ に対し} \quad \operatorname{tr}(XY)=0$$

ならば，$X=0$ となる．

証明　$X=\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}$, $x_{ij} \in \boldsymbol{C}$ とおくとき，$Y=E_{kl}$ に対して，$0=\operatorname{tr}(XY)=\operatorname{tr}(\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}E_{kl})=\operatorname{tr}(\sum_i x_{ik}E_{il})=x_{lk}$ となるが，これがすべての l, k に対してなりたつから，$X=0$ となる．

定理12.7　単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$ $(n \geqq 2)$, $\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$ $(n \geqq 3, n \neq 4)$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ $(n \geqq 1)$ の Killing 形式 B はそれぞれ

(1)　$B(X, Y)=2n\operatorname{tr}(XY)$　　　$X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})$

(2)　$B(X, Y)=(n-2)\operatorname{tr}(XY)$　　　$X, Y \in \mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$

(3)　$B(X, Y)=2(n+1)\operatorname{tr}(XY)$　　　$X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$

で与えられる．

証明　(1)　$$B_1(X, Y)=\operatorname{tr}(XY) \qquad X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C})=\mathfrak{g}$$

とおく．B_1 が $\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$-不変な対称な 2 次形式であることは容易に分かる（補題12．1 参照）．B_1 は非退化である．実際，$X \in \mathfrak{g}$ が

$$\text{すべての } Y \in \mathfrak{g} \text{ に対し} \quad \operatorname{tr}(XY)=0$$

とする．$Y \in M(n, \boldsymbol{C})$ に対し，$Y-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(Y)E \in \mathfrak{g}$ となるので，$0=\operatorname{tr}(X(Y-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(Y)E))=\operatorname{tr}(XY)-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(X)=\operatorname{tr}(XY)$ となる．よって，補題12.6 より $X=0$ となり，B_1 が非退化であることが示された．命題12．3 より，ある $\lambda \in \boldsymbol{C}$ が存在して

$$B(X, Y)=\lambda\operatorname{tr}(XY) \qquad X, Y \in \mathfrak{g}$$

となる．この定数 λ を決定するために，（記号は定理 4 .12と同じものを用いて）$X=Y=H_1$ とおく．

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{ad} H_1)^2E_{1i}=E_{1i}, && (\operatorname{ad} H_1)^2E_{i1}=E_{i1} && i \neq 1, n \\
&(\operatorname{ad} H_1)^2E_{in}=E_{in}, && (\operatorname{ad} H_1)^2E_{ni}=E_{ni} && i \neq 1, n \\
&(\operatorname{ad} H_1)^2E_{1n}=4E_{1n}, && (\operatorname{ad} H_1)^2E_{n1}=4E_{n1} \\
&(\operatorname{ad} H_1)^2E_{ij}=0 \quad \text{その他}, && (\operatorname{ad} H_1)^2H_i=0
\end{aligned}$$

であるから

$$B(H_1, H_1)=\operatorname{tr}((\operatorname{ad} H_1)^2)=4(n-2)+4\times 2=4n$$

となる．一方

$$\mathrm{tr}\,(H_1{}^2)=\mathrm{tr}\,(E_{11}+E_{nn})=2$$

である．よって，$\lambda=\dfrac{B(H_1, H_1)}{\mathrm{tr}\,(H_1{}^2)}=\dfrac{4n}{2}=2n$ となり，定理の(1)を得る．

(2) $$B_1(X, Y)=\mathrm{tr}\,(XY) \qquad X, Y\in \mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})=\mathfrak{g}$$

とおく．B_1 が $\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$-不変な対称な 2 次形式であることは容易に分かる．B_1 は非退化である．実際，$X\in\mathfrak{g}$ が

$$\text{すべての } Y\in\mathfrak{g} \text{ に対し} \quad \mathrm{tr}\,(XY)=0$$

とする．$Y\in M(n, \boldsymbol{C})$ に対し，$Y-{}^tY\in\mathfrak{g}$ となるので，$0=\mathrm{tr}\,(X(Y-{}^tY))=\mathrm{tr}\,(XY)-\mathrm{tr}\,(X{}^tY)=\mathrm{tr}\,(XY)+\mathrm{tr}\,({}^tX{}^tY)=2\mathrm{tr}\,(XY)$ となる．よって，補題 12.6 より $X=0$ となり，B_1 が非退化であることが示された．命題12.3 より，ある $\lambda\in\boldsymbol{C}$ が存在して

$$B(X, Y)=\lambda\mathrm{tr}\,(XY) \qquad X, Y\in\mathfrak{g}$$

となる．この定数 λ を決定するために，(記号は定理 4 .12と同じものを用いて) $X=Y=G_{12}$ とおく．

$$(\mathrm{ad}\ G_{12})^2G_{1i}=-G_{1i},\ (\mathrm{ad}\ G_{12})^2G_{2i}=-G_{2i} \qquad i\geqq 3$$
$$(\mathrm{ad} G_{12})G_{ij}=0 \quad \text{その他}$$

であるから

$$B(G_{12}, G_{12})=\mathrm{tr}\,((\mathrm{ad}\ G_{12})^2)=-2(n-2)$$

となる．一方

$$\mathrm{tr}\,(G_{12}{}^2)=\mathrm{tr}\,(-E_{11}-E_{22})=-2$$

である．よって，$\lambda=\dfrac{B(G_{12}, G_{12})}{\mathrm{tr}\,(G_{12}{}^2)}=\dfrac{-2(n-2)}{-2}=n-2$ となり，定理の(2)を得る．($n=2$, $n=4$ のとき，$\mathfrak{o}(n, \boldsymbol{C})$ は単純でない (定理11.10) が，その Killing 形式は定理のままでなりたっている)．

(3) $$B_1(X, Y)=\mathrm{tr}\,(XY) \qquad X, Y\in \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})=\mathfrak{g}$$

とおく．B_1 が $\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$-不変な対称な 2 次形式であることは容易に分かる．B_1 は非退化である．実際，$X\in\mathfrak{g}$ が

$$\text{すべての } Y\in\mathfrak{g} \text{ に対し} \quad \mathrm{tr}\,(XY)=0$$

とする．$Y\in M(n, \boldsymbol{C})$ に対し，$Y+J{}^tYJ\in\mathfrak{g}$ となるので，$0=\mathrm{tr}\,(X(Y+J{}^tYJ))=\mathrm{tr}\,(XY)+\mathrm{tr}\,(XJ{}^tYJ)=\mathrm{tr}\,(XY)+\mathrm{tr}\,(JXJ{}^tY)=\mathrm{tr}\,(XY)+\mathrm{tr}\,({}^tX{}^tY)=2\mathrm{tr}\,(XY)$ となる．よって，補題 12.6 より $X=0$ となり，B_1 が非退化であることが示された．命題12.3 より，ある $\lambda\in\boldsymbol{C}$ が存在して

$$B(X, Y)=\lambda\mathrm{tr}\,(XY) \qquad X, Y\in\mathfrak{g}$$

となる．この定数 λ を決定するために，(記号は定理 4 .12と同じものを用いて) $X=Y=H_1$ とおく．

$$(\mathrm{ad}\, H_1)^2 U_{1i}=U_{1i}, \qquad (\mathrm{ad}\, H_1)^2 \hat{U}_{1i}=\hat{U}_{1i} \qquad i\geqq 2$$

$$(\mathrm{ad}\, H_1)^2 V_{1i}=V_{1i}, \qquad (\mathrm{ad}\, H_1)^2 \hat{V}_{1i}=\hat{V}_{1i} \qquad i\geqq 2$$

$$(\mathrm{ad}\, H_1)^2 W_1=4\, W_1, \qquad (\mathrm{ad}\, H_1)^2 \hat{W}_1=4\, \hat{W}_1$$

$$(\mathrm{ad}\, H_1)^2(\text{その他の } U_{ij}, \cdots)=0$$

であるから

$$B(H_1, H_1)=\mathrm{tr}\,((\mathrm{ad} H_1)^2)=4(n-1)+4\times 2=4(n+1)$$

となる．一方

$$\mathrm{tr}\,(H_1{}^2)=\mathrm{tr}\,(E_{11}+E_{22})=2$$

である．よって $\lambda=\dfrac{B(H_1, H_1)}{\mathrm{tr}\,(H_1{}^2)}=\dfrac{4(n+1)}{2}=2(n+1)$ となり，定理の(3)を得る．

13. root 系と Dynkin 図形

複素行列 X を調べるのにその固有値が重要な役割を果たしたと同様に，単純複素 Lie 群 $\mathfrak{g}$ を調べるには root 系（ある意味で固有値といえるもの）が重要な役割を演ずることになる．この章の目的は，単純複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，その Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を定義し，$\mathfrak{h}$ に関する root 系，基本 root 系を求め、Dynkin 図形を画くことにある．これらの定義は一応すべて書くことにするが，不十分な所もあると思われるので〔3〕,〔4〕,〔5〕,〔7〕を参照していただきたい．まず，定義を列記しよう．

定義　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が，次の 2 つの条件

(1)　$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な $\boldsymbol{C}$-部分 Lie 環である．(すなわち，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{C}$-部分ベクトル空間であり，$H, H'\in\mathfrak{h}$ ならば $[H, H']=0$ となる)

(2)　$X\in\mathfrak{g}$ が，すべての $H\in\mathfrak{h}$ に対して $[X, H]\in\mathfrak{h}$ であるならば，$X\in\mathfrak{h}$ となる

をみたすとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分環**であるという．($\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ は存在し，かつ本質的に一意に定まる．すなわち $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の 2 つの Cartan 部分環とするとき，$\boldsymbol{C}$-Lie 環同型写像 $\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が存在して $\varphi(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}'$ となる*).

定義　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環とする．$\boldsymbol{C}$-線型写像 $\alpha: \mathfrak{h}\to\boldsymbol{C}$, $\alpha\neq 0$ に対し

$$\text{すべての } H\in\mathfrak{h} \text{ に対し}\quad [H, X]=\alpha(H)X$$

がなりたつような $\mathfrak{g}$ の元 X，$X\neq 0$ が存在するとき，α を $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）**root** という．(root α に対し，このような X は定数倍を除いて一意に定まる*ことが知られている．この X を α の **root ベクトル**という)．$\mathfrak{g}$ の root 全体

$$\varDelta=\{\alpha, \beta, \cdots, \gamma\}$$

を $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）**root 系**という．

定理13.1　$\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 1)$ において

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n+1}\end{pmatrix}\middle|\lambda_i\in \boldsymbol{C},\ \ \lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=0\right\}$$

は Cartan 部分環であり，（$\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\pm(\lambda_i-\lambda_j)\qquad 1\leqq i<j\leqq n+1$$

である．

証明　（定理 4 .12と同じ記号を用いる）．$\mathfrak{h}$ は明らかに $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1,\boldsymbol{C})$ の可換な $\boldsymbol{C}$-部分 Lie 環である．$H=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k E_{kk}\in\mathfrak{h}$ に対し

$$[H,E_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}\qquad i\neq j \tag{i}$$

がなりたつ．このことから $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環であることが分かる．実際，$X\in\mathfrak{g}$ を $X=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}+H'$ ($H'\in\mathfrak{h}$) と表わすとき，$H=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kE_{kk}\in\mathfrak{h}$ に対し

$$[H,X]=\sum_{i\neq j}a_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}$$

となるが，すべての $\lambda_i,\lambda_j\in\boldsymbol{C}$ に対してこの元が $\mathfrak{h}$ に属すならば $a_{ij}=0$ が分かり，$X=H'\in\mathfrak{h}$ となる．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環である．(i)は，写像 $\alpha_{ij}:\mathfrak{h}\to\boldsymbol{C}$，$\alpha_{ij}(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kE_{kk})=\lambda_i-\lambda_j$ が $\mathfrak{g}$ の($\mathfrak{h}$ に関する) root であることを示している．この α_{ij} を $\lambda_i-\lambda_j$ と書いている．

定理13.2　$\mathfrak{o}(2n+1,\boldsymbol{C})$ ($n\geqq1$) において

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\begin{matrix} & \lambda_1\\ -\lambda_1 & \end{matrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{matrix} & \lambda_n\\ -\lambda_n & \end{matrix} & \\ & & & 0\end{pmatrix}\middle|\lambda_i\in\boldsymbol{C}\right\}$$

は Cartan 部分環であり，（$\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\begin{aligned}&\pm(\lambda_i-\lambda_j) && 1\leqq i<j\leqq n\\ &\pm(\lambda_i+\lambda_j) && 1\leqq i<j\leqq n\\ &\pm\lambda_i && 1\leqq i\leqq n\end{aligned}$$

である．

証明　（定理 4 .12と同じ記号を用いる）．$\mathfrak{h}$ は明らかに $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(2n+1,\boldsymbol{C})$ の可換な $\boldsymbol{C}$-部分 Lie 環である．

$$H_i=\boldsymbol{i}G_{2i-1\,2i}\qquad i=1,\cdots,n$$

$$U_{ij}=(G_{2i-12j-1}+G_{2i2j})+\boldsymbol{i}(G_{2i-12j}-G_{2i2j-1}) \quad i<j$$
$$\hat{U}_{ij}=\boldsymbol{i}(G_{2i-12j-1}+G_{2i2j})+(G_{2i-12j}-G_{2i,2j-1}) \quad i<j$$
$$V_{ij}=(G_{2i-12j-1}-G_{2i2j})-\boldsymbol{i}(G_{2i-12j}+G_{2i2j-1}) \quad i<j$$
$$\hat{V}_{ij}=\boldsymbol{i}(G_{2i-12j-1}-G_{2i2j})-(G_{2i-12j}+G_{2i2j-1}) \quad i<j$$
$$W_i=G_{2i-12n+1}-\boldsymbol{i}G_{2i2n+1} \qquad i=1,\cdots,n$$
$$\hat{W}_i=\boldsymbol{i}G_{2i-12n+1}-G_{2i2n+1} \qquad i=1,\cdots,n$$

とおく．さて，$H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k\in\mathfrak{h}$ に対し

$$[H,U_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)U_{ij}, \quad [H,\hat{U}_{ij}]=-(\lambda_i-\lambda_j)\hat{U}_{ij},$$
$$[H,V_{ij}]=(\lambda_i+\lambda_j)V_{ij}, \quad [H,\hat{V}_{ij}]=-(\lambda_i+\lambda_j)\hat{V}_{ij},$$
$$[H,W_i]=\lambda_i W_i, \qquad [H,\hat{W}_i]=-\lambda_i\hat{W}_i$$

がなりたつ．このことから $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環であることが分かる．実際，$X\in\mathfrak{g}$ を $X=\sum_{i<j}a_{ij}U_{ij}+\sum_{i<j}\hat{a}_{ij}\hat{U}_{ij}+\sum_{i<j}b_{ij}V_{ij}+\sum_{i<j}\hat{b}_{ij}\hat{V}_{ij}+\sum_i c_iW_i+\sum_i\hat{c}_i\hat{W}_i+H'$ $(H'\in\mathfrak{h})$ で表わすとき，$H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kH_k\in\mathfrak{h}$ に対し

$$\begin{aligned}[H,X]=&\sum_{i<j}a_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)U_{ij}-\sum_{i<j}\hat{a}_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\hat{U}_{ij}\\&+\sum_{i<j}b_{ij}(\lambda_i+\lambda_j)V_{ij}-\sum_{i<j}\hat{b}_{ij}(\lambda_i+\lambda_j)\hat{V}_{ij}\\&+\sum_i c_i\lambda_iW_i-\sum_i\hat{c}_i\lambda_i\hat{W}_i\end{aligned}$$

となるが，すべての $\lambda_i,\lambda_j\in\boldsymbol{C}$ に対してこの元が $\mathfrak{h}$ に属すならば，$a_{ij}=\hat{a}_{ij}=b_{ij}=\hat{b}_{ij}=c_i=\hat{c}_i=0$ が分かり，$X=H'\in\mathfrak{h}$ となる．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環である．また，上式の関係は，$\pm(\lambda_i-\lambda_j)$，$\pm(\lambda_i+\lambda_j)$，$\pm\lambda_i$ が $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）root であることを示している．

定理13.3　$\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C})$ において

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & -\lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \\ & & & & -\lambda_n\end{pmatrix}\middle|\,\lambda_i\in\boldsymbol{C}\right\}$$

は Cartan 部分環であり，（$\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\pm(\lambda_i-\lambda_j) \qquad 1\leqq i<j\leqq n$$
$$\pm(\lambda_i+\lambda_j) \qquad 1\leqq i<j\leqq n$$
$$\pm2\lambda_i \qquad 1\leqq i\leqq n$$

である。

証明　(定理 4 .12 と同じ記号を用いるが再記する)．$\mathfrak{h}$ は明らかに $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の可換な $\boldsymbol{C}$-部分 Lie 環である．

$$H_i=E_{2i-1\,2i-1}-E_{2i2i} \qquad i=1,\cdots,n$$
$$U_{ij}=E_{2i-1 2j-1}-E_{2j2i}, \quad \hat{U}_{ij}=E_{2i2j}-E_{2j-12i-1} \quad i<j$$
$$V_{ij}=E_{2i-12j}+E_{2j-12i}, \quad \hat{V}_{ij}=E_{2i2j-1}+E_{2j2i-1} \quad i<j$$
$$W_i=E_{2i-12i}, \qquad \hat{W}_i=E_{2i2i-1} \quad i=1,\cdots,n$$

とおく．さて，$H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k\in\mathfrak{h}$ に対し

$$[H, U_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)U_{ij}, \quad [H, \hat{U}_{ij}]=-(\lambda_i-\lambda_j)\hat{U}_{ij},$$
$$[H, V_{ij}]=(\lambda_i+\lambda_j)V_{ij}, \quad [H, \hat{V}_{ij}]=-(\lambda_i+\lambda_j)\hat{V}_{ij},$$
$$[H, W_i]=2\lambda_i W_i, \qquad [H, \hat{W}_i]=-2\lambda_i\hat{W}_i$$

がなりたつ．このことから $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環であることが定理13．2 のようにすると分かり，上式は $\pm(\lambda_i-\lambda_j)$，$\pm(\lambda_i+\lambda_j)$，$\pm 2\lambda_i$ が $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）root であることを示している．

定理13.4　$\mathfrak{o}(2n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 3)$ において

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix} \begin{matrix} & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} & \lambda_n \\ -\lambda_n & \end{matrix} \end{pmatrix} \middle| \lambda_i\in\boldsymbol{C}\right\}$$

は Cartan 部分環であり，（$\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\pm(\lambda_i-\lambda_j) \qquad 1\leqq i<j\leqq n$$
$$\pm(\lambda_i+\lambda_j) \qquad 1\leqq i<j\leqq n$$

である．

証明　$\mathfrak{h}$ は明らかに $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(2n, \boldsymbol{C})$ の可換な $\boldsymbol{C}$-部分 Lie 環である．$\mathfrak{o}(2n+1, \boldsymbol{C})$ と同じように H_i，U_{ij}，$\hat{U}_{ij}$，V_{ij}，$\hat{V}_{ij}$ を定義する．さて，$H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k\in\mathfrak{h}$ に対し

$$[H, U_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)U_{ij}, \quad [H, \hat{U}_{ij}]=-(\lambda_i-\lambda_j)\hat{U}_{ij}$$
$$[H, V_{ij}]=(\lambda_i+\lambda_j)V_{ij}, \quad [H, \hat{V}_{ij}]=-(\lambda_i+\lambda_j)\hat{V}_{ij}$$

がなりたつ．このことから $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環であることが定理13.2のようにすると分かり，上式は $\pm(\lambda_i-\lambda_j)$，$\pm(\lambda_i+\lambda_j)$ が $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）root

であることを示している．

定義　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とし，Δ を $\mathfrak{g}$ の（ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する）root 系とする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Delta$ が，次の 2 つの条件

(1)　任意の $\alpha \in \Delta$ は $\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$（ただし m_i は整数であり，かつ $m_1, \cdots, m_n$ は同時に，$m_i \geqq 0$ であるか同時に $m_i \leqq 0$ のどちらかである）と一意に表わされる．

(2)　$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の個数 n は $\mathfrak{h}$ の次元に等しい：

$$n = \dim_C \mathfrak{h}$$

をみたすとき，$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は Δ の**基本 root 系**であるという．（Δ の基本 root 系 Π は存在し，かつ本質的に一意に定まる．すなわち，Π，Π' を Δ の 2 つの基本 root 系とするとき，$\mathfrak{g}$ の Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ の元 σ が存在して $\sigma(\Pi) = \Pi'$ となる*）．

定義　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環とする．$\mathfrak{h}$ の部分集合 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ を

$$\text{すべての root } \alpha \in \Delta \text{ に対し}\quad \alpha(H) \in \boldsymbol{R}$$

をみたす $H \in \mathfrak{h}$ の全体とすると，$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間になる．$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ を $\mathfrak{h}$ の**実部**という．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は $\mathfrak{g}$ 上で非退化であった（定理12．5）が，B を $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ に制限しても非退化になる*．さて，$\alpha \in \Delta$ に対し

$$\text{すべての } H \in \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} \text{ に対し}\quad B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$$

がなりたつような $H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ が唯一つ定まる．そこで $\alpha, \beta \in \Delta$ の内積 (α, β) を

$$(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$$

で定義する．

以上の準備のもとに，単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の画き方を説明しよう．

定義　$\mathfrak{g}$ を単純 $\boldsymbol{C}$-Lie 環とし，Δ を $\mathfrak{g}$ の（ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する）root 系とし，$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ を Δ の基本 root 系とする．$\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ $(i \neq j)$ に対し，$0 < \theta_{ij} < 180°$ を

$$\cos\theta_{ij} = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}}$$

で定める．（この θ_{ij} が定義され，かつ 90°，120°，135°，150° のいずれかである* ことを認める）．

$\theta_{ij} = 90°$　のとき　α_i，α_j を線で結ばない

$\theta_{ij} = 120°$　のとき　α_i，α_j を 1 本線で結ぶ

$\theta_{ij}=135^\circ$　のとき　α_i，α_j を 2 本線で結び，

かつ，$(\alpha_i, \alpha_i)>(\alpha_j, \alpha_j)$ ならば $\alpha_i \Rightarrow \alpha_j$ と画く

$\theta_{ij}=150^\circ$　のとき　α_i，α_j を 3 本線で結び，

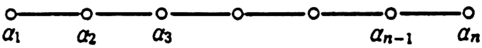
かつ，$(\alpha_i, \alpha_i)>(\alpha_j, \alpha_j)$ ならば $\alpha_i \Rrightarrow \alpha_j$ と画く

$\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ において，上の法則に従ってできた図形を $\mathfrak{g}$ の **Dynkin 図形**という．

定理13.5　$\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$ の root 系 $\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\ 1\leqq i<j\leqq n+1\}$ において

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3, \cdots, \alpha_n=\lambda_n-\lambda_{n+1}$$

は基本 root 系である．$\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$ の Dynkin 図形は



である．

証明　$$\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} \qquad i<j$$

と表わせるから，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は基本 root 系である．($-(\lambda_i-\lambda_j)$ は $\lambda_i-\lambda_j$ の符号を変えるだけであるから省略している)．$\mathfrak{h}$ の実部 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ は明らかに

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\{H=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k E_{kk} | \lambda_k \in \boldsymbol{R},\ \lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=0\}$$

である．$\alpha=\lambda_i-\lambda_j\in\Delta$ に対し

$$H_\alpha=\frac{1}{2(n+1)}(E_{ii}-E_{jj})$$

である．実際，$B(H_\alpha, H)=2(n+1)\mathrm{tr}(H_\alpha H)$（定理12．7）$=\mathrm{tr}((E_{ii}-E_{jj})(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k E_{kk}))=\lambda_i-\lambda_j$ となるからである．そこで，$(\alpha_i, \alpha_i)=B(H_{\alpha i}, H_{\alpha i})=2(n+1)\mathrm{tr}((H_{\alpha i})^2)=\frac{1}{2(n+1)}\mathrm{tr}((E_{ii}-E_{i+1 i+1})^2)=\frac{2}{2(n+1)}=\frac{1}{(n+1)}$ 等の計算をすることにより

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\frac{1}{n+1} \qquad i=1, \cdots, n$$

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})=-\frac{1}{2(n+1)} \qquad i=1, \cdots, n-1$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)=0 \qquad \text{その他}$$

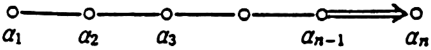
を得る．これより，$\cos\theta_{ii+1}=\frac{(\alpha_i, \alpha_{i+1})}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1})}}=\frac{n+1}{-2(n+1)}=-\frac{1}{2}$ となり，$\theta_{ii+1}=120^\circ$ を得る．このような計算をすると，容易に Dynkin 図形を画くこと

ができる.

定理13.6 $\mathfrak{o}(2n+1, \boldsymbol{C})$ の root 系 $\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j), 1\leqq i<j\leqq n, \pm(\lambda_i+\lambda_j), 1\leqq i<j\leqq n, \pm\lambda_i, 1\leqq i\leqq n\}$ において

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3,\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\quad \alpha_n=\lambda_n$$

は基本 root 系である. $\mathfrak{o}(2n+1, \boldsymbol{C})$ の Dynkin 図形は



である.

証明

$$\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} \qquad i<j$$

$$\lambda_i+\lambda_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{n-1}+2\alpha_n \qquad i<j$$

$$\lambda_i=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

と表わせるから, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は基本 root 系である. $\mathfrak{h}$ の実部 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ は明らかに(記号は定理13.2と同じとして)

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\{H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k | \lambda_k\in\boldsymbol{R}\}$$

である. $\alpha\in\Delta$ に対し H_α は, 定理12.7を用いて

$$H_{\pm(\lambda_i-\lambda_j)}=\frac{\pm 1}{2(2n-1)}(H_i-H_j)$$

$$H_{\pm(\lambda_i+\lambda_j)}=\frac{\pm 1}{2(2n-1)}(H_i+H_j)$$

$$H_{\pm\lambda_i}=\frac{\pm 1}{2(2n-1)}H_i$$

となる. これより

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\frac{1}{2n-1} \qquad i=1, \cdots, n-1$$

$$(\alpha_n, \alpha_n)=\frac{1}{2(2n-1)}$$

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})=-\frac{1}{2(2n-1)} \qquad i=1, \cdots, n-1$$

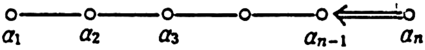
$$(\alpha_i, \alpha_j)=0 \qquad \text{その他}$$

となる. これより容易に Dynkin 図形を画くことができる.

定理13.7 $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の root 系 $\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j), 1\leqq i<j\leqq n, \pm(\lambda_i+\lambda_j), 1\leqq i<j\leqq n, \pm 2\lambda_i, 1\leqq i\leqq n\}$ において

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3,\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\quad \alpha_n=2\lambda_n$$

は基本 root 系である. $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$ の Dynkin 図形は



である．

証明
$$\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}\qquad i<j$$
$$\lambda_i+\lambda_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n\qquad i<j$$
$$2\lambda_i=2\alpha_i+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

と表わせるから，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ は基本 root 系である．$\mathfrak{h}$ の実部 $\mathfrak{h}_R$ は明らかに（記号は定理13．3 と同じとして）

$$\mathfrak{h}_R=\{H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k|\lambda_k\in \boldsymbol{R}\}$$

である．$\alpha\in\Delta$ に対し H_α は，定理12．7 を用いて

$$H_{\pm(\lambda_i-\lambda_j)}=\frac{\pm1}{4(n+1)}(H_i-H_j)$$
$$H_{\pm(\lambda_i+\lambda_j)}=\frac{\pm1}{4(n+1)}(H_i+H_j)$$
$$H_{\pm2\lambda_i}=\frac{\pm1}{2(n+1)}H_i$$

となる．これより

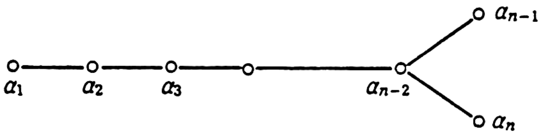
$$(\alpha_i,\alpha_i)=\frac{1}{2(n+1)}\qquad i=1,\cdots,n-1$$
$$(\alpha_n,\alpha_n)=\frac{1}{n+1}$$
$$(\alpha_i,\alpha_{i+1})=-\frac{1}{4(n+1)}\qquad i=1,\cdots,n-2$$
$$(\alpha_{n-1},\alpha_n)=-\frac{1}{2(n+1)}$$
$$(\alpha_i,\alpha_j)=0\qquad \text{その他}$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を画くことができる．

定理13.8　$\mathfrak{o}(2n,\boldsymbol{C})$ $(n\geqq3)$ の root 系 $\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\ 1\leqq i<j\leqq n,\ \pm(\lambda_i+\lambda_j),\ 1\leqq i<j\leqq n\}$ において

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3,\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\quad \alpha_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n$$

は基本 root 系である．$\mathfrak{o}(2n,\boldsymbol{C})$ の Dynkin 図形は



である.

証明　$\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}\qquad i<j$

$\lambda_i+\lambda_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n\qquad i<j$

と表わせるから, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は基本 root 系である. $\mathfrak{h}$ の実部 $\mathfrak{h}_R$ は明らかに(記号は定理13. 4 と同じとして)

$$\mathfrak{h}_R=\{H=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k H_k | \lambda_k\in \boldsymbol{R}\}$$

である. $\alpha\in\Delta$ に対し H_α は, 定理12. 7 を用いて

$$H_{\pm(\lambda_i-\lambda_j)}=\frac{\pm 1}{4(n-1)}(H_i-H_j)$$

$$H_{\pm(\lambda_i+\lambda_j)}=\frac{\pm 1}{4(n-1)}(H_i+H_j)$$

となる. これより

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\frac{1}{2(n-1)}\qquad i=1, \cdots, n$$

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})=\frac{-1}{4(n-1)}\qquad i=1, \cdots, n-2$$

$$(\alpha_{n-2}, \alpha_n)=\frac{-1}{4(n-1)}$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)=0\qquad \text{その他}$$

となる. これより容易に Dynkin 図形を画くことができる.

$\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{o}(2n+1, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{o}(2n, \boldsymbol{C})$ $(n\geqq 3)$ の Dynkin 図形が異なる (ただし低次元の特殊の場合を除く (定理11. 8)) ことは, これらが $\boldsymbol{C}$-Lie 環として同型でない (n を個々に変えると当然同型でない) ことを示している. それのみならず, Dynkin 図形から, Lie 群 $SU(n+1)$, $SO(2n+1)$, $Sp(n)$, $SO(2n)$ $(n\geqq 3)$ 等の群論的性質, 位相的性質が読み取れるのである. これらのことについては, その方面の専門書あるいは論文をみていただくことにしよう.

宿沢修，宮下敏一，佐藤隆衛，竹内健太郎等が，長野，伊那，甲府，上田，飯田，諏訪の遠路から永い者で20年，短かい者でも10年続けて，集まって話し合っています．時に，この会がビールや酒を飲む会に化けますが，この会が私にはどんなに大きい精神的な支えになったか分かりません．この紙上を貸りて御礼申し上げたいと思います．

Hilbert の第 5 の問題について

D. Hilbert が1900年の国際数学会で出題した23題のうちの 5 番目の問題について述べたいと思います．もちろんこの問題を真面目に解説するつもりはありませんし，またその能力は私にはありません．さて，Hilbert の第 5 の問題とは次のようです．

「位相多様体である位相群 G は Lie 群であるか」

G が Abel 群のときには Pontrjagin が，G が compact 群であるときは J. von Neumann が肯定的に解決していました．一般の時がどうかということですが1952年肯定的に解決されました．この問題の解決には数多くの研究者の協力があったとききますが，A.M. Gleason，D. Montgomery，L. Zippin，H. Yamabe 等がその頂点に立つ人であったようです．

さて，Hilbert の第 5 の問題がどういう感じのものであるかを，次の易しい問題を解くことによって理解して頂きましょう．

問題　$\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．連続関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が

$$f(s+t)=f(s)+f(t) \tag{1}$$

を満たすならば，f は，ある $a \in \boldsymbol{R}$ を用いて

$$f(t)=at$$

と表せる．

証明　(1)式において $s=t=0$ とおくと $f(0)=0$ を得る．さて，$f(1)=a$ とおくと

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=a+a=2a,$$
$$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2a+a=3a$$

となる．これを繰り返すと

$$f(n)=na \tag{2}$$

（p. 148 へつづく）

14. 例外型単純線型 Lie 群

単純 Lie 群には古典型とよばれるものと例外型とよばれるものがあることは先に述べた通りであるが，これまで古典型単純線型 Lie 群についてのみ書いてきた．この章で，例外型単純線型 Lie 群について述べようと思う．ただし，群の定義とその極分解の結果を書くに過ぎない．詳略を知りたい方は諸論文をみていただきたい．(I. Yokota-O. Yasukura, Non-compact simple Lie group $E_{8(8)}$, Tsukuba J. Math., (1986) の References に関係論文の List があるので，これも参照して下さい)．

G_2 型線型 Lie 群

$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{C}=\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e$ に積を

$$(a+be)(c+de)=(ac-\bar{d}b)+(b\bar{c}+da)e$$

で与えた $\boldsymbol{R}$-代数を **Cayley 代数**という．$\mathfrak{C}$ の元 x に対し，共役元 $\bar{x}$ と長さ $|x|$ を

$$\overline{a+be}=\bar{a}-be,\quad |x|=\sqrt{\bar{x}x}$$

で定義する．さて，群 G_2 を

$$G_2=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}$$

で定義すると，G_2 は compact 単連結 Lie 群になる．実際，$\alpha\in G_2$ は $\mathfrak{C}$ の長さを不変にする：$|\alpha x|=|x|$, $x\in\mathfrak{C}$ のことから，G_2 は直交群 $O(8)=O(\mathfrak{C})$ の閉部分になるので compact である．G_2 は $SU(3)$ を部分群に含み，$G_2/SU(3)\simeq\{x\in\mathfrak{C}\,|\,\bar{x}=-x, |x|=1\}=S^6$ となることから，G_2 の単連結性が導かれる．

$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{C}'=\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e'$ に積を

$$(a+be')(c+de')=(ac+\bar{d}b)+(b\bar{c}+da)e'$$

で与えた $\boldsymbol{R}$-代数を **split Cayley 代数**という．$\mathfrak{C}'$ の元 x に対し共役元 $\bar{x}$ を $\overline{a+be'}=\bar{a}-be'$ で定義する．また $\mathfrak{C}$ の複素化（$\mathfrak{C}'$ の複素化でもよい）を $\mathfrak{C}^C$

で表わし，**複素 Cayley 代数**という．さて，群 $G_2{}^C$，$G_{2(2)}$ をそれぞれ

$$G_2{}^C = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{C}^C) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\}$$
$$G_{2(2)} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}') \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\}$$

で定義する．これらの群の極分解は

$$G_2{}^C \simeq G_2 \times \boldsymbol{R}^{14}$$
$$G_{2(2)} \simeq (Sp(1) \times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{R}^8$$

で与えられる．これより，$G_2{}^C$ は単連結，$G_{2(2)}$ は連結な非 compact 群であることが分かる．G_2 を含めて，これらの群の中心は 1 のみである．次元はいずれも14次元（$G_2{}^C$ は複素14次元）である．

F_4 型線型 Lie 群

$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = X\}$ に積を

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

で与えた $\boldsymbol{R}$-代数を**例外 Jordan 代数**という．$\mathfrak{J}$ に正値な内積 (X, Y) を

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(X \circ Y)$$

で定義する．さらに，$\mathfrak{J}$ に Freudenthal 積 $X \times Y$，3 項内積 (X, Y, Z) と行列式 $\det X$ をそれぞれ

$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X, Y))E)$$

$$(X, Y, Z) = (X, Y \times Z), \quad \det X = \frac{1}{3}(X, X, X)$$

（E は 3 次の単位行列）で定義する．さて，群 F_4 を次の同値な関係の 1 つ

$$\begin{aligned} F_4 &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \det \alpha X = \det X, (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y)\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \det \alpha X = \det X, \alpha E = E\} \\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y\} \end{aligned}$$

で定義すると，F_4 は compact 単連結 Lie 群になる．実際，F_4 は直交群 $O(27) = O(\mathfrak{J})$ の閉部分群であるので compact である．F_4 は $Spin(9)$ を部分群に含み，$F_4/Spin(9) \simeq \{A \in \mathfrak{J} \mid A^2 = A, \mathrm{tr}(A) = 1\} = \mathfrak{C}P_2$（Cayley 射影平面）となることから，$F_4$ の単連結性が導かれる．

$$\mathfrak{J}^C = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}^C) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}^C) \mid X^* = X\}$$
$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}') = \{X \in M(3, \mathfrak{C}') \mid X^* = X\}$$

$$\mathfrak{J}_1=\mathfrak{J}(1,2,\mathfrak{C})=\{X\in M(3,\mathfrak{C})|I_1X^*I_1=X\}$$

を考え，$\mathfrak{J}$ と同様，Jordan 積を $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ で定義する．さて，群 $F_4{}^C$，$F_{4(4)}$，$F_{4(-20)}$ をそれぞれ

$$F_4{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)|\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$$
$$F_{4(4)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}')|\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$$
$$F_{4(-20)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}_1)|\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$$

で定義する．($\mathfrak{J}^C$，$\mathfrak{J}'$，$\mathfrak{J}_1$ には $\mathfrak{J}$ と同様，Freudenthal 積 $X\times Y$，内積(X, Y)，行列式 $\det X$ が定義され，F_4 と同様に，群 $F_4{}^C$，$F_{4(4)}$，$F_{4(-20)}$ をこれらを用いても定義できる)．これらの群の極分解は

$$F_4{}^C\simeq F_4\times \boldsymbol{R}^{52}$$
$$F_{4(4)}\simeq(Sp(1)\times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^{28}$$
$$F_{4(-20)}\simeq Spin(9)\times\boldsymbol{R}^{16}$$

で与えられる．これより，$F_4{}^C$，$F_{4(-20)}$ は単連結，$F_{4(4)}$ は連結な非 compact 群であることが分かる．F_4 を含めて，これらの群の中心は 1 のみである．次元はいずれも52次元（$F_4{}^C$ は複素52次元）である．

E_6 型線型 Lie 群

複素例外 Jordan 代数 $\mathfrak{J}^C$ に正値な Hermite 内積 $\langle X, Y\rangle$ を

$$\langle X, Y\rangle=(\tau X, Y)$$

で定義する．さて，群 E_6 を

$$E_6=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)|\det\alpha X=\det X, \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}$$

で定義すると，E_6 は compact 単連続 Lie 群になる．実際，E_6 は unitary 群 $U(27)=U(\mathfrak{J}^C)$ の閉部分群であるので compact である．E_6 は F_4 を部分群に含み，$E_6/F_4\simeq\{A\in\mathfrak{J}^C|\det A=1, \langle A, A\rangle=3\}=E\mathrm{IV}$（$E$IV型対称空間）となることから，$E_6$ が連結性が導かれる．E_6 の単連結性は，E_6 の中心が $z(E_6)=\{1, \omega 1, \omega^2 1\}=\boldsymbol{Z}_3$（$\omega$ は 1 の原始 3 乗根）であることから分かることである．

対合 C-線型写像 γ，σ：$\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ をそれぞれ

$$\gamma\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & \gamma x_3 & \gamma\overline{x}_2\\ \gamma\overline{x}_3 & \xi_2 & \gamma x_1\\ \gamma x_2 & \gamma\overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}$$

（ここに，右辺の γ は γ：$\mathfrak{C}^C=\boldsymbol{H}^C\oplus\boldsymbol{H}^Ce\to\mathfrak{C}^C=\boldsymbol{H}^C\oplus\boldsymbol{H}^Ce$，$\gamma(a+be)=a-be$ で定義された C-線型写像である)，

$$\sigma\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & -x_3 & -\overline{x}_2\\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ -x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}$$

で定義し，$\mathfrak{J}^C$ に Hermite 内積 $\langle X, Y\rangle_\gamma$，$\langle X, Y\rangle_\sigma$ をそれぞれ

$$\langle X, Y\rangle_\gamma=(\tau\gamma X, Y),\quad \langle X, Y\rangle_\sigma=(\tau\sigma X, Y)$$

で定義する．さて，群 $E_6{}^C$，$E_{6(6)}$，$E_{6(2)}$，$E_{6(-14)}$，$E_{6(-26)}$ をそれぞれ

$$E_6{}^C=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)|\det\alpha X=\det X\}$$

$$E_{6(6)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}')|\det\alpha X=\det X\}$$

$$E_{6(2)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)|\det\alpha X=\det X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle_\gamma=\langle X, Y\rangle_\gamma\}$$

$$E_{6(-14)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)|\det\alpha X=\det X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle_\sigma=\langle X, Y\rangle_\sigma\}$$

$$E_{6(-26)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})|\det\alpha X=\det X\}$$

で定義する．これらの群の極分解は

$$E_6{}^C\simeq E_6\times\boldsymbol{R}^{78}$$

$$E_{6(6)}\simeq Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^{42}$$

$$E_{6(2)}\simeq(Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^{40}$$

$$E_{6(-14)}\simeq(U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4\times\boldsymbol{R}^{32}$$

$$E_{6(-26)}\simeq F_4\times\boldsymbol{R}^{26}$$

で与えられる．これより，$E_6{}^C$，$E_{6(-26)}$ は単連結，$E_{6(6)}$，$E_{6(2)}$，$E_{6(-14)}$ は連結な非 compact 群であることが分かる．$E_{6(6)}$，$E_{6(-26)}$ の中心は 1 のみであり，E_6 を含めて，$E_6{}^C$，$E_{6(2)}$，$E_{6(-14)}$ の中心は $\boldsymbol{Z}_3$ である．次元はいずれも78次元（$E_6{}^C$ は複素78次元）である．

E_7 型線型 Lie 群

C-ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$ を

$$\mathfrak{P}^C=\mathfrak{J}^C\oplus\mathfrak{J}^C\oplus C\oplus C$$

で定義し，$\mathfrak{P}^C$ に内積 (P, Q)，正値な Hermite 内積 $\langle P, Q\rangle$，$P=(X, Y, \xi, \eta)$，$Q=(Z, W, \zeta, \omega)$ をそれぞれ

$$(P, Q)=(X, Z)+(Y, W)+\xi\zeta+\eta\omega$$

$$\langle P, Q\rangle=\langle X, Z\rangle+\langle Y, W\rangle+(\tau\xi)\eta+(\tau\eta)\omega$$

で定義する．群 $E_6{}^C$ の Lie 環を $\mathfrak{e}_6{}^C$：$\mathfrak{e}_6{}^C=\{\phi\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)|(\phi X, X, X)=0\}$ とする．さて，$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$A, B\in\mathfrak{J}^C$，$\nu\in C$ に対し，C-線型写像 $\Phi(\phi, A, B, \nu)$：$\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$\Phi(\phi, A, B, \nu)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \phi X-\frac{1}{3}\nu X+2B\times Y+\eta A \\ 2A\times X-{}^t\phi Y+\frac{1}{3}\nu Y+\xi B \\ (A, Y)+\nu\xi \\ (B, X)-\nu\eta \end{pmatrix}$$

で定義する．ここに，${}^t\phi$ は $\mathfrak{J}^C$ の内積 (X, Y) に関する ϕ の転置写像である：$({}^t\phi X, Y)=(X, \phi Y)$．次に，$P=(X, Y, \xi, \eta)$，$Q=(Z, W, \zeta, \omega)\in\mathfrak{P}^C$ に対して，C-線型写像 $P\times Q : \mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$P\times Q=\Phi(\phi, A, B, \nu),\quad \begin{cases} \phi=-\frac{1}{2}(X^\vee W+Z^\vee Y) \\ A=-\frac{1}{4}(2Y\times W-\xi Z-\zeta X) \\ B=\frac{1}{4}(2X\times Z-\eta W-\omega Y) \\ \nu=\frac{1}{8}((X, W)+(Z, Y)-3(\xi\omega+\zeta\eta)) \end{cases}$$

で定義する．ここに，$X^\vee Y\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$X, Y\in\mathfrak{J}^C$ は

$$(X^\vee Y)Z=\frac{1}{2}(Y, Z)X+\frac{1}{6}(X, Y)Z-2Y\times(X\times Z) \qquad Z\in\mathfrak{J}^C$$

である．以上の準備のもとに，群 E_7 を

$$E_7=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q, \langle\alpha P, \alpha Q\rangle=\langle P, Q\rangle\}$$

で定義すると，E_7 は compact 単連結 Lie 群になる．実際，E_7 は unitary 群 $U(56)=U(\mathfrak{P}^C)$ の閉部分群であるので compact である．E_7 は E_6 を部分群に含み，$E_7/E_6=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,P\times P=0, \langle P, P\rangle=1\}$ となることから，E_7 が連結性が導かれる．E_7 の単連結性は，E_7 の中心が $z(E_7)=\{1, -1\}=\boldsymbol{Z}_2$ であることから分かることである．

$\mathfrak{P}^C$ に Hermite 内積 $\langle P, Q\rangle_\gamma$ を

$$\langle P, Q\rangle_\gamma=(\tau\gamma P, Q)$$

で定義する．ここに，$\gamma P=\gamma(X, Y, \xi, \eta)=(\gamma X, \gamma Y, \xi, \eta)$（右辺の γ は $\mathfrak{J}^C$ で定義されたもの）である．また，$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\mathfrak{P}$，$\mathfrak{P}'$ をそれぞれ

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{J}\oplus\mathfrak{J}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$$

$$\mathfrak{P}'=\mathfrak{J}'\oplus\mathfrak{J}'\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$$

で定義し，$\mathfrak{P}^C$ におけると同様に，$P, Q\in\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ に対して，$\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ の $\boldsymbol{R}$-線型写像 $P\times Q$ をそれぞれ定義しておく．さて，群 $E_7{}^C$，$E_{7(7)}$，$E_{7(-5)}$，$E_{7(-25)}$ をそれぞれ

$$E_7{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\}$$
$$E_{7(7)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{P}')\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\}$$
$$E_{7(-5)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q,\ \langle\alpha P,\ \alpha Q\rangle_\gamma=\langle P,\ Q\rangle_\gamma\}$$
$$E_{7(-25)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{P})\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\}$$

で定義する．これらの群の極分解は

$$E_7{}^C\simeq E_7\times \boldsymbol{R}^{133}$$
$$E_{7(7)}\simeq SU(8)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{70}$$
$$E_{7(-5)}\simeq (SU(2)\times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{64}$$
$$E_{7(-25)}\simeq (U(1)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3\times \boldsymbol{R}^{54}$$

で与えられる．これより，$E_7{}^C$ は単連結，$E_{7(7)}$，$E_{7(-5)}$，$E_{7(-25)}$ は連結な非 compact 群であることが分かる．E_7 を含めて，これらの群の中心は $\{1,\ -1\}=\boldsymbol{Z}_2$ である．次元はいずれも133次元（$E_7{}^C$ は複素133次元）である．

E_8 型線型 Lie 群

C-ベクトル空間

$$\mathfrak{e}_8{}^C=\mathfrak{e}_7{}^C\oplus\mathfrak{P}^C\oplus\mathfrak{P}^C\oplus C\oplus C\oplus C$$

（$\mathfrak{e}_7{}^C$ は $E_7{}^C$ の Lie 環とする：$\mathfrak{e}_7{}^C=\{\Phi(\phi,A,B,\nu)\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C,\ A,B\in\mathfrak{J}^C,\nu\in C\}$）に Lie 積［$R_1,R_2$］を

$$[(\Phi_1,P_1,Q_1,r_1,s_1,t_1),(\Phi_2,P_2,Q_2,r_2,s_2,t_2)]=(\Phi,P,Q,r,s,t)$$
$$\begin{cases}\Phi=[\Phi_1,\Phi_2]+P_1\times Q_2-P_2\times Q_1\\ P=\Phi_1P_2-\Phi_2P_1+r_1P_2-r_2P_1+s_1Q_2-s_2Q_1\\ Q=\Phi_1Q_2-\Phi_2Q_1-r_1Q_2+r_2Q_1+t_1P_2-t_2P_1\\ r=-\dfrac{1}{8}\{P_1,Q_2\}+\dfrac{1}{8}\{P_2,Q_1\}+s_1t_2-s_2t_1\\ s=\dfrac{1}{4}\{P_1,P_2\}+2r_1s_2-2r_2s_1\\ t=-\dfrac{1}{4}\{Q_1,Q_2\}-2r_1t_2+2r_2t_1\end{cases}$$

で定義すると，$\mathfrak{e}_8{}^C$ は複素単純 Lie 環になる．ここに，内積 $\{P,Q\}$，$P=(X,Y,\xi,\eta)$，$Q=(Z,W,\zeta,\omega)\in\mathfrak{P}^C$ の定義は $\{P,Q\}=(X,W)-(Y,Z)+\xi\omega-\eta\zeta$ である．$\mathfrak{e}_8{}^C$ に正値な Hermite 内積 $\langle R_1,R_2\rangle$，$R_i=(\Phi_i,P_i,Q_i,r_i,s_i,t_i)$，$i=1,2$ を

$$\langle R_1,R_2\rangle=\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle+\langle P_1,P_2\rangle+\langle Q_1,Q_2\rangle+8(\tau r_1)r_1+4(\tau s_1)s_2+4(\tau t_1)t_2$$

で定義する．ここに $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$，$\Phi_i = \Phi(\phi_i, A_i, B_i, \nu_i)$，$i=1,2$ の定義は

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle + 4\langle A_1, A_2 \rangle + 4\langle B_1, B_2 \rangle + \frac{8}{3}(\tau\nu_1)\nu_2$$

であり，さらに $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ の定義が必要となるが省略する (T. Imai-I. Yokota, Simply connected compact simple Lie group $E_{8(-248)}$ of type E_8, J. Math., Kyoto Univ. (1981) を参照して下さい)．さて，群 E_8 を

$$E_8 = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2], \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle\}$$

で定義すると，E_8 は compact 単連結 Lie 群になる．実際，E_8 は unitary 群 $U(248) = U(\mathfrak{e}_8{}^C)$ の閉部分群であるので compact である．E_8 の連結性の証明は省略する (上の論文を参照して下さい)．E_8 の単連結性は，E_8 の中心が 1 のみであることから分かることである．(注：E_8 は E_7 を部分群に含み，$E_8/E_7 = \{R \in \mathfrak{e}_8{}^C \mid R \times R = 0, \langle R, R \rangle = 4\}$ がなりたっている．$R \times R$ の定義も上の論文を見て下さい)．

$\mathfrak{e}_{7(7)}$，$\mathfrak{e}_{7(-25)}$ をそれぞれ $E_{7(7)}$，$E_{7(-25)}$ の Lie 環とし，$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間を

$$\mathfrak{e}_{8(8)} = \mathfrak{e}_{7(7)} \oplus \mathfrak{P}' \oplus \mathfrak{P}' \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$$

$$\mathfrak{e}_{8(-24)} = \mathfrak{e}_{7(-25)} \oplus \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$$

で定義し，$\mathfrak{e}_8{}^C$ と同様な Lie 積を定義して Lie 環の構造を与えておく．さて，群 E_8^C，$E_{8(8)}$，$E_{8(-24)}$ をそれぞれ

$$E_8{}^C = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$

$$E_{8(8)} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(8)}) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$

$$E_{8(-24)} = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(-24)}) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$

で定義する．これらの群の極分解は

$$E_8{}^C \simeq E_8 \times \boldsymbol{R}^{248}$$

$$E_{8(8)} \simeq Ss(16) \times \boldsymbol{R}^{128}$$

$$E_{8(-24)} \simeq (SU(2) \times E_7)/\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{R}^{112}$$

で与えられる．これより，$E_8{}^C$ は単連結，$E_{8(8)}$，$E_{8(-24)}$ は連結な非 compact 群であることが分かる．E_8 を含めて，これらの群の中心は 1 のみである．次元はいずれも248次元（$E_8{}^C$ は複素248次元）である．

が 0 または正の整数 n に対して成り立つことが分かる．次に，$f(-n)+f(n)=f(-n+n)=f(0)=0$ より

$$f(-n)=-f(n)=-na$$

となり(2)が任意の整数 n に対し成り立つことが分かる．さらに，m，n を整数（ただし $n>0$）とするとき，$nf\left(\frac{m}{n}\right)=\overbrace{f\left(\frac{m}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{m}{n}\right)}^{n}=\overbrace{f\left(\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}\right)}^{n}=f(m)=ma$ より $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}a$ となる．以上より

$$f(r)=ar \qquad r \text{ は有理数}$$

が成り立つことが分かった（今までの計算は $f(s+t)=f(s)+f(t)$ のみを用いており，関数 f の連続性は用いてない）．さて，t を任意に与えられた実数とするとき，t に収束する有理数列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ をとる $(\lim_{n\to\infty} r_n=t)$ ことができるので，関数 f の連続性を用いると

$$f(t)=f(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} ar_n=at$$

となり，問題が解けた．

この問題の意味する所を説明しましょう．$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が $f(s+t)=f(s)+f(t)$ を満たすことは f が準同型写像であるということであって代数的な性質です．一方，関数 f が連続であるということは位相的な性質です．問題は準同型写像という「代数的性質」と連続という「位相的性質」から導かれた関数は $f(t)=at$ となり，f は（t に関して）微分可能になってしまうことを示しています．関数が可微分であることは「解析的性質」といえるでしょう．すなわち，この問題は「代数的性質」と「位相的性質」から「解析的性質」が導かれることを示しています．

話を元に戻して Hilbert の第 5 の問題を眺めてみましょう．

「位相多様体である位相 群 は Lie 群であるか」
（位相多様体である位相：位相的，群：代数的，Lie：解析的）

このように，「位相的性質」と「代数的性質」から「解析的性質」が導き出せるかというのが，Hilbert の第 5 の問題であったのです．

前述の問題を拡張したのが定理3.1であり，24頁で「C^∞-可微分の所を連続性におきかえて読んでいって十分である」を書いたのも，連続性から C^∞-可微分性が導かれるからです．

15. まとめ

本書に登場した単純線型 Lie 群を表にしてまとめておこう．$Spin(n)$ は $SO(n)$ の被覆群であるので重複している意味もあるが，両者とも書いておくことにした．また低次元のものの中には単純でないものがあったり，同型なものがある（10，11章参照）ので注意しよう．本書にある単純線型 Lie 群は（$SO(n)$ を除いて）すべて普遍単純線型 Lie 群であり，また単純線型 Lie 群 G のその中心 $z(G)$ の部分群 N による剰余群 G/N はまた単純線型 Lie 群になることが知られているので，これですべての単純線型 Lie 群が得られたことになっている．さらに，各群の位相を知るためのもととして各群の極分解も書いておいた．なお，例外 Lie 群の中心と次元は，compact 単連結 Lie 群のそれらと同じ場合には，そこに書いて他の所に書くのを省略している．

$SU(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})\,|\,A^*A=E, \det A=1\}$

$z(SU(n))=\boldsymbol{Z}_n \qquad \dim(SU(n))=n^2-1$

$SL(n, \boldsymbol{C})=\{A\in M(n, \boldsymbol{C})\,|\,\det A=1\}$

$\simeq SU(n)\times \boldsymbol{R}^{n^2-1}$

$z(SL(n, \boldsymbol{C}))=\boldsymbol{Z}_n \qquad \dim_C(SL(n, \boldsymbol{C}))=n^2-1$

$SL(n, \boldsymbol{R})=\{A\in M(n, \boldsymbol{R})\,|\,\det A=1\}$

$\simeq SO(n)\times \boldsymbol{R}^{(n+2)(n-1)/2}$

$z(SL(n, \boldsymbol{R}))=\begin{cases}1 & n \text{ 奇数}\\ \boldsymbol{Z}_2 & n \text{ 偶数}\end{cases} \qquad \dim(SL(n, \boldsymbol{R}))=n^2-1$

$SU(m, n)=\{A\in M(m+n, \boldsymbol{C})\,|\,A^*I_mA=I_m, \det A=1\}$

$\simeq S(U(m)\times U(n))\times \boldsymbol{R}^{2mn}$

$z(SU(m, n))=\boldsymbol{Z}_2 \qquad \dim(SU(m, n))=(m+n)^2-1$

$SU^*(2n)=\{A\in M(2n, \boldsymbol{C})\,|\,JA=\bar{A}J, \det A=1\}$

$\simeq Sp(n)\times \boldsymbol{R}^{(n-1)(2n+1)}$

$z(SU^*(2n))=\boldsymbol{Z}_2 \qquad \dim(SU^*(2n))=4n^2-1$

$Spin(n)=\{\alpha\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\,|\,\alpha=a_1\cdots a_{2m},\ \ m=1, 2, \cdots, a_i\in S^{n-1}\}$

$$z(Spin(2n+1))=\boldsymbol{Z}_2$$

$$z(Spin(2n))=\begin{cases}\boldsymbol{Z}_4 & n\ \text{奇数}\\ \boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2 & n\ \text{偶数}\end{cases}\qquad (n\geqq 2)$$

$$\dim(Spin(n))=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$SO(n)=\{A\in M(n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tAA=E,\ \det A=1\}$$

$$z(SO(n))=\begin{cases}1 & n\ \text{奇数}\\ \boldsymbol{Z}_2 & n\ \text{偶数}\geqq 4\end{cases}\qquad \dim(SO(n))=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$SO(n,\boldsymbol{C})=\{A\in M(n,\boldsymbol{C})\,|\,{}^tAA=E,\ \det A=1\}$$
$$\simeq SO(n)\times\boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}$$

$$z(SO(n,\boldsymbol{C}))=\begin{cases}1 & n\ \text{奇数}\\ \boldsymbol{Z}_2 & n\ \text{偶数}\geqq 4\end{cases}\qquad \dim_C(SO(n,\boldsymbol{C}))=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$O(m,n)_0=\left\{A=\begin{pmatrix}B & T\\ S & C\end{pmatrix}\in M(m+n,\boldsymbol{R})\,\middle|\,{}^tAI_mA=I_m,\ \det B=\det C\geqq 1\right\}$$
$$\simeq(SO(m)\times SO(n))\times\boldsymbol{R}^{mn}$$

$$z(O(m,n)_0)=\begin{cases}1 & m+n\ \text{奇数},\ \ m,n\ \text{共奇数},\ \ O(1,1)_0\ \text{除く}\\ \boldsymbol{Z}_2 & m,n\ \text{共偶数}\end{cases}$$

$$\dim(O(m,n)_0)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$$

$$SO^*(2n)=\{A\in M(2n,\boldsymbol{C})\,|\,JA=\bar{A}J,\ {}^tAA=E,\ \det A=1\}$$
$$\simeq U(n)\times\boldsymbol{R}^{n(n-1)}$$

$$z(SO^*(2n))=\boldsymbol{Z}_2\qquad \dim(SO^*(2n))=n(2n-1)$$

$$Sp(n)=\{A\in M(n,\boldsymbol{H})\,|\,A^*A=E\}$$

$$z(Sp(n))=\boldsymbol{Z}_2\qquad \dim(Sp(n))=n(2n+1)$$

$$Sp(n,\boldsymbol{R})=\{A\in M(2n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tAJA=J\}$$
$$\simeq U(n)\times\boldsymbol{R}^{n(n+1)}$$

$$z(Sp(n,\boldsymbol{R}))=\boldsymbol{Z}_2\qquad \dim(Sp(n,\boldsymbol{R}))=n(2n+1)$$

$$Sp(m,n)=\{A\in M(m+n,\boldsymbol{H})\,|\,A^*I_mA=I_m\}$$
$$\simeq(Sp(m)\times Sp(n))\times\boldsymbol{R}^{4mn}$$

$$z(Sp(m,n))=\boldsymbol{Z}_2\qquad \dim(\mathrm{Sp}(m,n))=(m+n)(2(m+n)+1)$$

$$G_2=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}$$

$$z(G_2)=1\qquad \dim(G_2)=14$$

$$G_2{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{C}_C)\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}$$
$$\simeq G_2\times\boldsymbol{R}^{14}$$

$G_{2(2)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}')\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}$

$\simeq (Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^6$

$F_4=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$

$z(F_4)=1$ $\qquad$ $\dim(F_4)=52$

$F_4{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$

$\simeq F_4\times \boldsymbol{R}^{52}$

$F_{4(4)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}')\,|\,\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$

$\simeq (Sp(1)\times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{28}$

$F_{4(-20)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}_1)\,|\,\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$

$\simeq Spin(9)\times \boldsymbol{R}^{16}$

$E_6=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det\alpha X=\det X,\ \langle\alpha X,\ \alpha Y\rangle=\langle X,\ Y\rangle\}$

$z(E_6)=\boldsymbol{Z}_3$ $\qquad$ $\dim(E_6)=78$

$E_6{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det\alpha X=\det X\}$

$\simeq E_6\times \boldsymbol{R}^{78}$ $\qquad$ $z(E_6{}^C)=\boldsymbol{Z}_3$

$E_{6(6)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}')\,|\,\det\alpha X=detX\}$

$\simeq Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{42}$ $\qquad$ $z(E_{6(6)})=1$

$E_{6(2)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\mathrm{dex}\,\alpha X=\det X,\ \langle\alpha \mathrm{X},\ \alpha \mathrm{Y}\rangle_\gamma=\langle x,\ y)_\gamma\}$

$\simeq (Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{40}$ $\qquad$ $z(E_{6(2)})=\boldsymbol{Z}_3$

$E_{6(-14)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det\alpha \mathrm{X}=\det X,\ (\alpha X,\ \alpha Y)_\sigma=\langle X,\ Y\rangle_\sigma\}$

$\simeq (U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4\times \boldsymbol{R}^{32}$ $\qquad$ $z(E_{6(-14)})=\boldsymbol{Z}_3$

$E_{6(-26)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,\det\alpha \mathrm{X}=\det X\}$

$\simeq F_4\times \boldsymbol{R}^{26}$ $\qquad$ $z(E_{6(-26)})=1$

$E_7=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times \alpha Q,\ \langle\alpha P,\ \alpha Q)=\langle P,\ Q\rangle\}$

$z(E_7)=\boldsymbol{Z}_2$ $\qquad$ $\dim(E_7)=133$

$E_7{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times \alpha Q\}$

$\simeq E_7\times \boldsymbol{R}^{133}$

$E_{7(7)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{P}')\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times \alpha Q\}$

$\simeq SU(8)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{70}$

$E_{7(-5)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times \alpha Q,\ \langle\alpha P,\ \alpha Q\rangle_\gamma=(P,\ Q\rangle_\gamma\}$

$\simeq (SU(2)\times Spin(12)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{64}$

$E_{7(-25)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{P})\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times \alpha Q\}$

$\simeq (U(1)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3\times \boldsymbol{R}^{54}$

$E_8=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C)\,|\,\alpha[R_1,\ R_2]=[\alpha R_1,\ \alpha R_2],\ \langle\alpha R_1,\ \alpha R_2\rangle=\langle R_1,\ R_2\rangle\}$

$z(E_8)=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \dim(E_8)=248$

$$E_8{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C)\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$
$$\simeq E_8\times \boldsymbol{R}^{248}$$
$$E_{8(8)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(8)})\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$
$$\simeq Ss(16)\times \boldsymbol{R}^{128}$$
$$E_{8(-24)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(-24)})\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$
$$\simeq(SU(2)\times E_7)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{112}$$

あとがき

参考書

[1] J.F. Adams, Lectures on Lie groups, Benjamin, 1969.

[2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.

[3] S. Hegason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[4] 岩堀長慶，リー群論 I，II，現代応用数学講座，岩波書店，1957.

[5] 松島与三，リー環論，現代数学講座，共立出版，1957.

[6] 村上信吾，連続群論の基礎，基礎数学シリーズ，朝倉書店，1973.

[7] H. Samelson, Notes on Lie algebras, van Nostrand Reinhald Math. Studies, 1969.

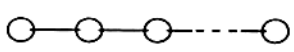
[8] 山内恭彦—杉浦光夫，連続群論，新数学シリーズ，培風館，1960.

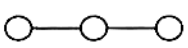
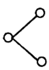
[9] 横田一郎，群と位相，基礎数学選書，裳華房，1971.

[10] 横田一郎，群と表現，基礎数学選書，裳華房，1973.

[11] 横田一郎，多様体とモース理論，現代数学社，1978.

数学とは何を学ぶ学問であるかその定義を私は知らない．数学は，何か未知なものがあればそれを分からせようとする意味で学問の一種であることは確かである．その形状は何であるかははっきりしないが，数学はやはり存在するようにも思える．さて，宇宙のように膨張し続ける数学の一端に Lie 群論がある．さらに，その中の一連の小惑星にあたる単純線型 Lie 群を本書で取り扱ってきた．その単純 Lie 群を調べるのに普通 Lie 環を用いる．単純 Lie 環は Cartan 部分環，root 系，基本 root 系を経て最終的には Dynkin 図形に帰着されてしまう．しかも不思議なことに，この skelton のような Dynkin 図形が単純 Lie 群の global な性質まで規定してしまうのである．すなわち，Dynkin 図形から，root 系が読みとれ，Lie 環が作られ，さらに(複素または compact)単純 Lie 群が構成され，その性質が分かるのである．Dynkin 図形から Lie 群へ戻る間には，いくつかの存在定理，拡張定理，構成定理，一意性定理があって，我々はそのすばらしく美しい理論に感服し，Killing，Cartan，Weyl，Dynkin，Borel 等の先人達の偉大さに最大の敬意を表すること

になる．しかし，或る意味において我々を失望させてしまう．大きい定理をたどって行く途中で，いつの間にかその本質が見えなくなってしまうからである．凡人がもつ悲哀であるようである．例えば Dynkin 図形  から Lie 群 $SU(n)$ の中心，最大階数の極大部分群，対合自己同型写像，表現のこと等何でも分かってしまうのである．一応証明を知っていても不思議である．それどころか，非 compact 単純 Lie 群の状況まで分かってしまうのである．ますますもって不思議である．私は今までこのすばらしい不思議に抵抗して来たといえる．root 系を用いない Lie 群論を「初等 Lie 群論」というらしい．初等とは幼稚でつまらないということではない．root 系を意識して排除しているわけでないが，私の場合結果的そうなってしまっている．

いま，2 つの単純 Lie 群 G，G' があったとする．これらの Lie 環が同型で位相も同じであるから，G，G' は Lie 群として同型である筈である．しかし，数学を学ぶ者の中には，この筈に満足できなくて同型対応 $f: G \to G'$ を具体的に見つけたいと思う者がいてもよいと思う．例えば，A_3 の Dynkin 図形は  であり，D_3 の Dynkin 図形は  であって，両者は同じであるので，位相が共に compact 単連結であるとの理由で，Lie 群の同型 $SU(4) \cong Spin(6)$ を得る筈として何らかまわない．しかし，私自身何となく釈然としないものがあって，ずっと気にしていたことであった．定理10.11の写像 $f: SU(4) \to SO(6)$ は，例外群 E_6 の部分群 $SU(6)$ を探している時に見つけたものである．(Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ を四元数体 $\boldsymbol{H}$ におきかえて得られるのである)．もし本書に特色があるとすれば，それは 3 章 Lie 群の同型と10章低次元 Lie 群にあるといわせて頂ければ幸いである．10章は〔3〕Helgason の519，520頁にある低次元 Lie 環の同型の List の群化であるといえるが，$\mathfrak{su}^*(4) \cong \mathfrak{so}(5,1)$，$\mathfrak{su}(3,1) \cong \mathfrak{so}^*(6)$，$\mathfrak{so}^*(8) \cong \mathfrak{so}(6,2)$ の群化を未だ私は知らないので，御存知の方は是非お教え下さい．書き足らない所が多く，不備な点も多い本かもしれませんが，どうか何時までも可愛がって下さるよう願います．

1989年11月20日記　　横田一郎

付記　$\mathfrak{su}^*(4) \cong \mathfrak{so}(5,1)$，$\mathfrak{su}(3,1) \cong \mathfrak{so}^*(6)$ に対応する群同型 $SU^*(4)/\boldsymbol{Z}_2 \cong O(5,1)_0$，$SU(3,1)/\boldsymbol{Z}_2 \cong SO^*(6)$ が分かりました．この同型を与える準同型写像 $f: SU^*(4) \to O(5,1)_0$，$f: SU(3,1) \to SO^*(6)$ は本書にある写像を組み合せて得られます（宮下敏一氏等による）．　1990年 4 月14日再記

索　引

タ

ナ

著者紹介
横田一郎（よこた・いちろう）

著者略歴
1926年大阪府出身
大阪大学理学部数学科卒，大阪市立大学理学部数学科助手，講師，助教授，
信州大学理学部数学科教授を経て，退官，信州大学名誉教授．理学博士．

主　書　群と位相，群と表現（以上裳華房）
ベクトルと行列（共著），微分と積分（共著），
やさしい位相幾何学の話，例題が教える群論入門，一般数学（共著），
多様体とモース理論，線型代数セミナー（共著），例外型単純リー群
（以上 現代数学社）

古典型単純リー群

2013年 1月24日　　新版第1刷発行

検印省略

著　者　横田一郎
発行者　富田　淳
発行所　株式会社　現代数学社
〒606-8425 京都市左京区鹿ヶ谷西寺ノ前町1
TEL&FAX 075 (751) 0727　振替 01010-8-11144
http://www.gensu.co.jp/

印　刷　牟禮印刷株式会社

ISBN978-4-7687-0403-5